

UNIVERSITÄT BONN

Instantoneffekte in einem kovarianten Quarkmodell der Baryonen

Diplomarbeit in Physik
von
Ulrich Klemens Löring
aus Rheine



TK-97-03

Januar 1997

Institut für
Theoretische Kernphysik

Nußallee 14-16 · D-53115 Bonn · Germany

Instantoneffekte in einem kovarianten Quarkmodell der Baryonen

von

Ulrich Klemens Löring

Diplomarbeit in Physik

angefertigt im

Institut für Theoretische Kernphysik

vorgelegt der

Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität

zu Bonn

im Januar 1997

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Referent: Prof. Dr. Herbert R. Petry

Koreferent: Prof. Dr. Werner Sandhas

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Die 3-Fermionen Bethe-Salpeter-Gleichung	4
1.1 Die Greensche Funktion für drei Fermionen	4
1.2 Gebundene qq̄q-Zustände als Pole der Greenschen Funktion	11
1.3 Herleitung der Bethe-Salpeter-Gleichung und der Normierungsbedingung	14
1.3.1 Laurententwicklung der Greensfunktion	15
1.3.2 Die Bethe-Salpeter-Gleichung	16
1.3.3 Die Normierungsbedingung	17
2 Die instantane Näherung und die Salpeter-Gleichung	19
2.1 Herleitung der Salpeter-Gleichung	20
2.1.1 Näherungen für das Quarkmodell	20
2.1.2 Die Salpeter-Gleichung und ihr Lösungsraum	22
2.2 Die Vertexfunktion	24
2.3 Die Normierungsbedingung für die Salpeter-Amplituden	25
2.4 Symmetrien der Salpeter-Gleichung	27
2.4.1 Paritätsinvarianz	27
2.4.2 Zeitumkehrinvarianz	27
2.4.3 Symmetrie bezüglich positiver und negativer Eigenwerte	28
2.4.4 Das Skalierungsverhalten der Salpeter-Gleichung	30
2.4.5 Permutationssymmetrie	31
2.5 Reduktion der Salpeter-Amplituden auf Pauli-Spinoren	34
2.5.1 Die Struktur eines Dirac-Spinors	35
2.5.2 Die Salpeter-Amplitude als Einbettung von Pauli-Spinoren	35
2.5.3 Die Zerlegung der $2 \times 2 \times 2$ - Amplituden ξ^\pm für ein Baryon mit definierten Quantenzahlen	37
3 Die Numerische Lösung der Salpeter-Gleichung	42
3.1 Die Konstruktion der nichtrelativistischen $2 \times 2 \times 2$ -Baryonbasis	42
3.1.1 Die Colour-Wellenfunktion	42
3.1.2 Die Spin-Wellenfunktionen	43
3.1.3 Die Flavour-Wellenfunktionen	43
3.1.4 Die Kombination von Spin und Flavour	45
3.1.5 Die Impuls-(Orts-)raum-Wellenfunktionen	46
3.1.6 Die total antisymmetrischen Baryonbasiszustände	48
3.2 Die Formulierung der Salpeter-Gleichung als Matrixgleichung	48
3.3 Die Berechnung der Matrixelemente	51
3.3.1 Die Berechnung der Wechselwirkungsmatrixelemente	53

3.3.2	Die Berechnung der Matrixelemente der kinetischen Energie	67
4	Baryonspektren im Salpeter-Modell	69
4.1	Einführung	69
4.1.1	Die experimentelle Situation	69
4.1.2	Resultate und ungelöste Probleme im nichtrelativistischen Quarkmodell .	71
4.2	Der Bethe-Salpeter-Wechselwirkungskern	73
4.2.1	Das Confinement	73
4.2.2	Die 't Hooftsche Wechselwirkung	76
4.3	Die Resultate und ihre Diskussion	80
4.3.1	Die Massenspektren der Baryonen	80
4.3.2	Untersuchung der Instanton-induzierten Quark-Quark-Restwechselwirkung	93
5	Zusammenfassung und Ausblick	105
A	6-Punkt-Greensfunktion und Bethe-Salpeter-Amplituden	107
A.1	Abseparation der 'Schwerpunktskoordinate'	107
A.2	Minimum und Maximum dreier Zahlen	108
A.3	Die θ -Funktion in der Greensfunktion	109
A.4	Der Zusammenhang zwischen Bethe-Salpeter-Amplituden und der Greensfunktion im Impulsraum	109
B	Die Salpeter-Gleichung	111
B.1	Herleitung der Salpeter-Gleichung	111
B.2	Der Zusammenhang zwischen der Salpeter-Amplitude Φ und ihrer Adjungierten $\bar{\Phi}$	112
B.3	Die Salpeter-Normierungsbedingung für eine instantane Wechselwirkung	113
C	Dirac-Gleichung und Dirac-Spinoren in der Weyl-Darstellung	116
C.1	γ -Matrizen in der Weyl-Darstellung	116
C.2	Die Dirac-Spinoren in der Weyl-Darstellung	116
C.3	Die Darstellung von Poincaré-Transformationen auf den Dirac-Spinoren	119
C.3.1	Spezielle Poincaré-Transformationen	119
C.3.2	Die Paritätstransformation	120
C.3.3	Die Zeitumkehrtransformation	121
D	Die Oszillatorbasis	122
D.1	Der harmonische Oszillator	122
D.2	Der harmonische Oszillator für drei Teilchen gleicher Masse und Oszillatorstärke	124
D.3	Talmi-Moshinsky-Transformationen	127
D.4	Sätze von Jacobi-Koordinaten und ihre Darstellung durch Talmi-Moshinsky-Transformationen	128
D.5	Oszillatorfunktionen mit definierter S_3 -Permutationssymmetrie	129
E	Drehimpulskopplungen und Wigner-Eckart-Theorem	132
E.1	Drehimpuls-Eigenzustände und Tensoroperatoren	132
E.2	Drehimpulskopplungen	133
E.3	Wigner-Eckart-Theorem und reduzierte Matrixelemente	135
F	Dirac-Spinstrukturen und ihre Darstellung auf dem Spinraum der $2 \times 2 \times 2$- Amplituden	137
F.1	Mögliche Spinstrukturen	137

F.2 Reduktion der Spinstrukturen	139
Literaturverzeichnis	145

Einleitung

Die quantitative, konsistente Beschreibung von Mesonen und Baryonen, ist auch heute noch eine der interessantesten Herausforderungen an die moderne Elementarteilchenphysik. Als zugrundeliegende Feldtheorie wird heute die sogenannte Quantenchromodynamik (QCD) als die richtige elementare Theorie zur Beschreibung hadronischer Zustände allgemein anerkannt. Sie kann wie fast alle Theorien von fundamentalen Wechselwirkungen (wie z.B. auch die Quantenelektrodynamik (QED)), aus dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz hergeleitet werden. Dabei wechselwirken Quarks als Träger einer Farbladung mittels Austausch von Eichbosonen, den sogenannten Gluonen, und bilden zusammengesetzte Systeme – eben die Hadronen. Dennoch ist es nicht unproblematisch, innerhalb dieser Theorie die hadronischen Eigenschaften von Teilchen zu berechnen. Der Vergleich mit der QED zeigt signifikante Unterschiede, die aus dem nichtabelschen Charakter der zugrundeliegenden Eichgruppe resultieren. Statt nur einer besitzen die Quarks drei mögliche Farbladungen und die Gluonen sind selbst Farbladungsträger. In Prozessen, wo große Energien und Impulsüberträge eine Rolle spielen kann man die Quarks als freie Teilchen betrachten und eine störungstheoretische Rechnung durch Entwicklung nach der Kopplungskonstanten α_s vornehmen (Asymptotische Freiheit).

Die experimentell beobachteten Hadronen haben jedoch Anregungen mit typischen Energien < 1 GeV. Eine perturbative Rechnung im Rahmen der QCD versagt aber wegen der wachsenden Größe der Kopplungskonstanten α_s bei mittleren und kleinen Energien, also gerade in dem Bereich der hadronischen Grundzustände und niederenergetischen Anregungen. Zur Untersuchung der Struktur und Wechselwirkung von Hadronen greift man daher i.a. auf Modellvorstellungen zurück. Der wichtigste Ansatz ist das sogenannte Konstituenten-Quarkmodell. In diesem werden die gluonischen Freiheitsgrade bei niedrigen Energien durch Einführung von sogenannten Konstituenten-Quarks mit einer effektiven Masse und einer effektiven Wechselwirkung eliminiert. Der langreichweitige Teil der Wechselwirkung, der dem Confinement entspricht, wird dabei durch einen geeigneten (i.a. linearen) Potentialansatz parametrisiert. Das komplexe Vielteilchensystem wird damit zu einem einfachen 3- (Baryon) bzw. 2-Teilchensystem (Meson) reduziert und hadronische Zustände werden als Anregungen der Freiheitsgrade der Konstituenten-Quarks verstanden. Im nichtrelativistischen Quarkmodell, wie es von Isgur und Karl [5] am ausführlichsten diskutiert wurde, konnten mit einem solchen Ansatz die Spektren von Mesonen und Baryonen gut beschrieben werden. Trotz der Erfolge des nichtrelativistischen Quarkmodells bei der Berechnung von Meson- und Baryonmassen ist die Anwendbarkeit insbesondere für leichte Quarks (u,d,s) fraglich, da sich leichte Quarks mit relativistischen Geschwindigkeiten bewegen. In der Tat führt die naive Anwendung nichtrelativistischer Zerfallsformeln zu falschen Resultaten insbesondere im Grundzustands-Meson-Oktett. Zur Berechnung von Zerfallsobservablen bedarf es also einer kovarianten Theorie.

Um sowohl die Massen als auch die Zerfallsobservablen von **Mesonen** berechnen zu können wurde am Institut für Theoretische Kernphysik von C. R. Münz, J. Resag, B. C. Metsch und H. R. Petry [13, 12, 10, 11] ein kovariantes Quarkmodell für Mesonen entwickelt. Dieses basiert auf der relativistischen **2-Teilchen-Bethe-Salpeter-Gleichung** [1], die in der rela-

tivistischen Quantenfeldtheorie einen gebundenen Zustand von zwei Teilchen beschreibt. Zur Vermeidung von konzeptionellen Schwierigkeiten wird die **instantane Näherung** dieser Gleichung (d.i. Salpeter-Gleichung [2]) verwendet, die immer noch formal kovariant ist. Der Quark-Antiquark-Wechselwirkungskern der Salpeter-Gleichung besteht aus einem linear ansteigenden Confinement-Anteil mit geeigneter Dirac-Struktur und einer zusätzlichen Restwechselwirkung ('t Hooft's-Kraft) die aus Instanton-Effekten in der QCD abgeleitet werden kann [32]. In diesem kovarianten Modell konnten sowohl die Spektren als auch elektroschwache Zerfallsobservablen der Mesonen erfolgreich reproduziert werden. Insbesondere lieferte die Verwendung der Instanton-induzierten Restwechselwirkung im Rahmen dieses relativistischen Modells die richtige $\pi - \eta - \eta'$ -Aufspaltung und $\eta - \eta'$ -Flavour-Mischung, wobei zu betonen ist, daß die Verwendung der 't Hooftschen-Kraft in einem nichtrelativistischen Mesonmodell diesbezüglich nicht zu so guten Resultaten kam.

Die Erfolge des kovarianten Mesonmodells im Rahmen des Bethe-Salpeter-Formalismus sind eine Motivation für die Verallgemeinerung dieses Modells auf die **Baryonen**, die in der vorliegenden Arbeit vorgenommen werden wird. Wir wählen dazu entsprechend als Ausgangspunkt die **3-Teilchen-Bethe-Salpeter-Gleichung** in **instantaner Näherung**, deren 3-Quark-Wechselwirkungskern analog zum Mesonmodell aus einem linear ansteigenden Confinement-Anteil mit geeigneter Dirac-Struktur und der Instanton-induzierten Restwechselwirkung modelliert wird. Zur Vermeidung konzeptioneller Schwierigkeiten werden Anteile von 2-Teilchen-Wechselwirkungskernen in der Bethe-Salpeter-Gleichung von vornherein vernachlässigt. Die bisherigen Rechnungen mit diesem Modell sind von rein spektroskopischer Art, doch wird es in Zukunft möglich sein, wie im Fall der Mesonen auch für die Baryonen elektroschwache Zerfallsobservablen zu berechnen. Die Arbeit ist inhaltlich wie folgt in vier Kapitel gegliedert:

Im *Kapitel 1* leiten wir die 3-Teilchen-Bethe-Salpeter-Gleichung für ein gebundenes System von drei Fermionen (Quarks), sowie die Normierungsbedingung für die Lösungen (Bethe-Salpeter-Amplituden) dieser Gleichung her. Der Ausgangspunkt dafür ist die quantenfeldtheoretische 6-Punkt-Greensfunktion. Wir zeigen, wie man durch Ausnutzung der analytischen Struktur der Greensfunktion am Pol eines gebundenen Zustands simultan die Gleichung und die Normierung der Bethe-Salpeter-Amplituden durch eine Laurententwicklung gewinnt.

Im *Kapitel 2* diskutieren wir kurz die konzeptionellen Schwierigkeiten der 8-dimensionalen Bethe-Salpeter-Gleichung. Zur Vermeidung dieser Schwierigkeiten werden Anteile von 2-Teilchen-Kernen komplett vernachlässigt, für den verbleibenden 3-Teilchen-Kern nehmen wir an, daß Retardierungseffekte keine Rolle spielen (instantane Näherung). Darüberhinaus nähern wir 1-Teilchen-Propagatoren durch freie Propagatoren und führen damit effektive Konstituenten-Quarkmassen als Parameter in unser Modell ein. Dieses Konzept führt uns auf eine 6-dimensionale Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung – die **Salpeter-Gleichung**, die immer noch formal kovariant ist und die volle Dirac-Struktur mit Komponenten positiver und negativer Energie enthält. Die Salpeter-Gleichung läßt sich als ein Eigenwertproblem $\mathcal{H}\Phi = M \Phi$ für die Masse M des Baryons formulieren. Wir analysieren die Struktur und den Lösungsraum dieser Gleichung: Es zeigt sich daß die instantane Näherung zu einer Projektor-Struktur führt, die die Zahl der unabhängigen Funktionen zur Beschreibung des Baryonzustandes stark reduziert. Die Normierungsbedingung der Bethe-Salpeter-Amplituden führt uns auf ein hermitesches, positiv definites Skalarprodukt, was die Struktur unseres Problems und die Interpretierbarkeit der Lösungen Φ (Salpeter-Amplituden) stark vereinfacht.

Im *Kapitel 3* entwickeln wir eine Methode zur numerischen Lösung des Eigenwertproblems. Dazu wird die Salpeter-Amplitude nach einer geeigneten endlichen Basis entwickelt, wodurch sich die Salpeter-Gleichung als ein reelles, symmetrisches Eigenwertproblem in Matrixform formulieren läßt, dessen Lösung mit Standard-Diagonalisierungsverfahren trivial ist. Die Berechnung

der Matrixelemente bzgl. des oben erwähnten Skalarproduktes selbst ist dagegen nicht trivial und numerisch sehr aufwendig. Wir entwickeln daher einen Formalismus, mit dem sich die Matrixelemente der Dirac-Spinoren auf Matrixelemente von Pauli-Spinoren reduzieren lassen, die dann mit bekannten Methoden (basierend auf dem Wigner-Eckart Theorem) relativ einfach zu berechnen sind. Dieses Lösungsverfahren wurde in C++ programmiert.

Im *Kapitel 4* benutzen wir den Formalismus als Grundlage für ein kovariantes Quarkmodell zur Berechnung der Massen und Salpeter-Amplituden der leichten Baryonen mit up-, down- und strange-Inhalt. Analog zum kovarianten Salpeter-Meson-Modell von Münz und Resag wird das Confinement durch ein linear ansteigendes 2-Teilchen-Potential mit einer Kombination einer skalaren und einer zeitartigen Vektor-Dirac-Spinstruktur parametrisiert. Für das Confinementpotential untersuchen wir zwei Varianten (Modell I und II), die sich strukturell nur in der gewählten Dirac-Struktur des konstanten Anteils des Potentials unterscheiden. Für die Beschreibung der Oktett-Grundzustandsbaryonen muß zum Confinement zusätzlich eine Restwechselwirkung addiert werden. Wie im Salpeter-Mesonmodell von Münz und Resag benutzen wir dafür die Instanton-induzierte Restwechselwirkung von 't Hooft. Eine nichtrelativistische Version dieser Wechselwirkung [21–23] führte bereits zu guten Resultaten bei der Berechnung von Baryon-Spektren. Dennoch konnten in dieser nichtrelativistischen Form einige Merkmale der Spektren wie z.B. die Roper-Zustände $N^{\frac{1}{2}+}(1440)$, $\Lambda^{\frac{1}{2}+}(1600)$ und $\Sigma^{\frac{1}{2}+}(1660)$ des Baryonspektrums ('Roper-Problem') nur ansatzweise beschrieben werden. Es zeigt sich in der Tat, daß gerade die relativistische Behandlung der Instanton-induzierten Restwechselwirkung im Rahmen unseres Salpeter-Baryon-Modells das Merkmal der Roper-Resonanzen beschreiben kann: das Roper-Problem für die Resonanzen $N^{\frac{1}{2}+}(1440)$ und $\Lambda^{\frac{1}{2}+}(1600)$ wird in beiden Modellen in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment gelöst. Für die Resonanz $\Sigma^{\frac{1}{2}+}(1660)$ erreichen wir zumindest eine Verbesserung gegenüber dem nichtrelativistischen Modell. Neben der Beschreibung der Gesamtstruktur der Baryonspektren für beide Varianten des Confinementpotentials bildet die Untersuchung von Instantoneffekten den Schwerpunkt dieses Kapitels. Die oben angesprochenen Roper-Resonanzen werden in allen Sektoren $N^{\frac{1}{2}+}$, $\Lambda^{\frac{1}{2}+}$, $\Sigma^{\frac{1}{2}+}$ und $\Xi^{\frac{1}{2}+}$ der Oktett-Grundzustandsbaryonen untersucht. Darüberhinaus studieren wir die Aufspaltung der Oktett-Grundzustände gegenüber den Dekuplettzuständen. Es zeigt sich, daß durch 't Hoofts Kraft in Verbindung mit dem Confinement-Modell II, dessen konstanter Anteil eine Projektor-Spinstruktur besitzt, das Spektrum der Grundzustandsbaryonen in guter Übereinstimmung mit dem Experiment beschrieben werden kann. Die Aufspaltungen $N - \Delta$, $\Sigma - \Sigma^*$, $\Xi - \Xi^*$ zwischen dem Dekuplett und dem Oktett, sowie die $\Sigma - \Lambda$ -Differenz im Oktett werden reproduziert. Das Modell I versagt diesbezüglich im strange-Sektor.

Kapitel 1

Die 3-Fermionen Bethe-Salpeter-Gleichung

In diesem Kapitel wollen wir mit Methoden der relativistischen Quantenfeldtheorie die Bethe-Salpeter-Gleichung für ein aus drei Fermionen bestehendes, gebundenes System herleiten. Wir folgen hierbei der Idee von Gell-Mann und Low [4], die zur Herleitung der 2-Teilchen-Bethe-Salpeter-Gleichung die Bethe-Salpeter-Amplituden in Beziehung zum 2-Teilchen-Propagator (4-Punkt-Greensfunktion) setzen. Eine ausführliche Darstellung dieser Methode findet man z.B. in dem Lehrbuch von Lurie [3].

In Analogie zu dieser Vorgehensweise gehen wir von der 6-Punkt Greensfunktion für drei Fermionen aus, für die aus der Störungstheorie eine Integralgleichung hergeleitet werden kann. Die Essenz der Methode besteht nun darin, aus der Polstruktur der Greenschen Funktion in der Nähe eines gebundenen Zustands simultan eine Integralgleichung (die Bethe-Salpeter-Gleichung in Integralform) und die Normierungsbedingung für die Amplituden herzuleiten; dieses geschieht durch eine Laurententwicklung der Greenschen Funktion am Pol des gebundenen Zustands.

Die Herleitung der Bethe-Salpeter-Gleichung speziell für den Fall von drei Teilchen findet man z. B. in dem Lehrbuch von D. Flamm und F. Schöberl [25], sowie in einer Arbeit von Y. Tomozawa [14], der die Methoden aus [3] für drei Fermionen verallgemeinert. Weitere Grundlagen zu diesem Kapitel sind in den Arbeiten von M. Böhm und R.F. Meyer [16, 17, 15] beschrieben. Eine ganz allgemeine quantenfeldtheoretische Beschreibung gebundener Zustände aus n Fermionen durch Pole der n -Punkt-Greensfunktion kann man in dem Lehrbuch von S. Weinberg [18] nachlesen. In der Vorgehensweise und Notation halten wir uns vornehmlich an die Arbeit von C.R. Münz [10].

1.1 Die Greensche Funktion für drei Fermionen

In der relativistischen Quantenfeldtheorie wird die Propagation dreier miteinander wechselwirkender Fermionen durch den Vakuumerwartungswert eines zeitgeordneten Produktes von je drei Fermionfeldoperatoren im Heisenberg-Bild Ψ und $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ beschrieben; dieses ist die Sechs-Punkt-Greensfunktion (3-Fermion-Propagator):

$$G_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) \equiv -\langle 0 | T \Psi_\alpha^1(x_1) \Psi_\beta^2(x_2) \Psi_\gamma^3(x_3) \bar{\Psi}_{\alpha'}^1(x'_1) \bar{\Psi}_{\beta'}^2(x'_2) \bar{\Psi}_{\gamma'}^3(x'_3) | 0 \rangle \quad (1.1)$$

Diese stellt die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür dar, daß drei Fermionen an den Raum-Zeit-Punkten¹ x'_1, x'_2, x'_3 erzeugt werden und zu den Raum-Zeit-Punkten x_1, x_2, x_3 propagieren.

¹ $x_i = (x_i^0, x_i^1, x_i^2, x_i^3)$

Hierbei ist T der Zeitordnungsoperator, der in folgender Weise auf die Fermionfeldoperatoren $\Psi, \bar{\Psi}$ wirkt:

$$\begin{aligned} T\Psi_\alpha^1(x_1)\bar{\Psi}_{\alpha'}^1(x'_1) &= -T\bar{\Psi}_{\alpha'}^1(x'_1)\Psi_\alpha^1(x_1) \\ &= \Psi_\alpha^1(x_1)\bar{\Psi}_{\alpha'}^1(x'_1)\theta(x_1^0 - x'_1{}^0) - \bar{\Psi}_{\alpha'}^1(x'_1)\Psi_\alpha^1(x_1)\theta(x'_1{}^0 - x_1^0). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Die Indizes $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ sind Multi-Indizes für Spin-, Flavour-, und Colour-Komponenten der Quarks q , die durch die Fermionfeldoperatoren beschrieben werden. Der Zustand $|0\rangle$ beschreibt das physikalische Vakuum.

In der Störungstheorie für n -Punkt-Greensfunktionen wird gezeigt, daß $G(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3)$ in der Form einer Störungsreihe [3]

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) &= \frac{-1}{\langle 0|T \exp\left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \hat{H}_{I_p}(t)\right)|0\rangle} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int d^4y_1 \dots d^4y_k \\ &\times \langle 0|T\Psi_{I_p}^1(x_1)\Psi_{I_p}^2(x_2)\Psi_{I_p}^3(x_3)\bar{\Psi}_{I_p}^1(x'_1)\bar{\Psi}_{I_p}^2(x'_2)\bar{\Psi}_{I_p}^3(x'_3)\hat{H}_{I_p}(y_1)\dots\hat{H}_{I_p}(y_k)|0\rangle \end{aligned} \quad (1.3)$$

geschrieben werden kann, wobei nun $|0\rangle$ das ungestörte Vakuum ist und $\Psi_{I_p}, \bar{\Psi}_{I_p}, \hat{H}_{I_p}$ sowie \hat{H}_{I_p} die Fermionfeldoperatoren, der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator und der Wechselwirkungs-Hamiltondichtoperator im Wechselwirkungsbild sind.

Der Vakuumerwartungswert auf der rechten Seite in (1.3) läßt sich mit dem Wickschen Theorem berechnen und die Auswertung (z.B. im Fall der QED) von (1.3) zeigt, daß die Greensfunktion sämtliche verbundene Feynmangraphen² enthält, die zur Wechselwirkung zwischen den drei Fermionen beitragen (siehe Abb. 1.1). Für die Beschreibung eines gebundenen Zustands der

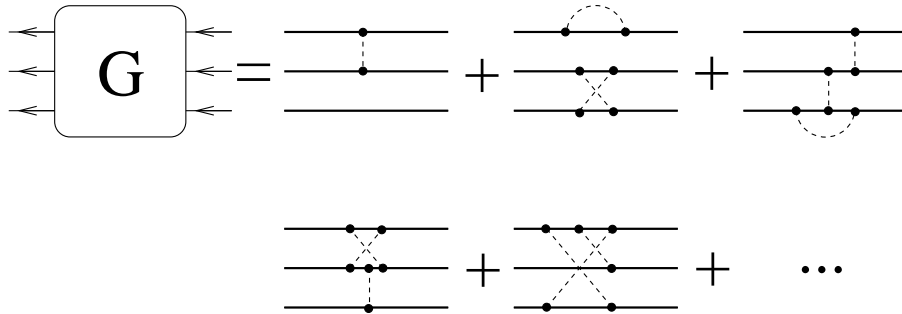


Abbildung 1.1: Entwicklung der 6-Punkt-Greensfunktion nach Feynmangraphen (z.B. in der QED). Die äußeren linien stellen freie 1-Teilchen Propagatoren dar.

drei Fermionen darf die Störungsreihe (1.3) nicht abbrechen, denn Terme zu Feynmangraphen höherer Ordnung können die gleiche Größenordnung haben wie Terme niedriger Ordnung. Um alle relevanten Terme zu berücksichtigen, kann man die Störungsreihe in Form einer inhomogenen Integralgleichung schreiben, indem man die Reihenfolge der Summanden in geeigneter Weise umarrangiert [1, 4, 3, 25].

Dieses geschieht durch Klassifizierung sämtlicher Summanden der Störungsreihe nach reduzierblen und irreduzierblen Anteilen (Beispiele für irreduzierblen Graphen sind in den Abbildungen 1.4 und 1.5 angegeben); die reduzierblen Terme werden dann iterativ aus den irreduzierblen erzeugt. Diese

²Alle Graphen mit unverbundenen Vakuumblasen werden aufgrund des Normierungsfaktors in (1.3) fortgelassen.

Iteration schreibt sich formal als Integralgleichung³:

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) = & \\
& S_{1\alpha\alpha'}^F(x_1, x'_1) S_{2\beta\beta'}^F(x_2, x'_2) S_{3\gamma\gamma'}^F(x_3, x'_3) \\
& -i \int d^4x_1'' d^4x_2'' d^4x_3'' d^4x_1''' d^4x_2''' d^4x_3''' S_{1\alpha\alpha''}^F(x_1, x_1'') S_{2\beta\beta''}^F(x_2, x_2'') S_{3\gamma\gamma''}^F(x_3, x_3'') \\
& K_{\alpha''\alpha''' \beta''\beta''' \gamma''\gamma'''}^{(3)}(x_1'', x_2'', x_3''; x_1''', x_2''', x_3''') G_{\alpha''' \alpha' \beta''' \beta' \gamma''' \gamma'}(x_1''', x_2''', x_3'''; x'_1, x'_2, x'_3) \\
& -i \sum_{\substack{\text{zykl. Perm.} \\ (123)}} \int d^4x_1'' d^4x_2'' d^4x_1''' d^4x_2''' S_{1\alpha\alpha''}^F(x_1, x_1'') S_{2\beta\beta''}^F(x_2, x_2'') \\
& K_{\alpha''\alpha''' \beta''\beta''' \gamma''\gamma'''}^{(2)}(x_1'', x_2''; x_1''', x_2''') G_{\alpha''' \alpha' \beta''' \beta' \gamma''' \gamma'}(x_1''', x_2''', x_3; x'_1, x'_2, x'_3). \tag{1.4}
\end{aligned}$$

Eine diagrammatische Darstellung der Integralgleichung (1.4) für die 3-Fermionen-Greensfunktion ist in Abbildung 1.2 zu sehen.

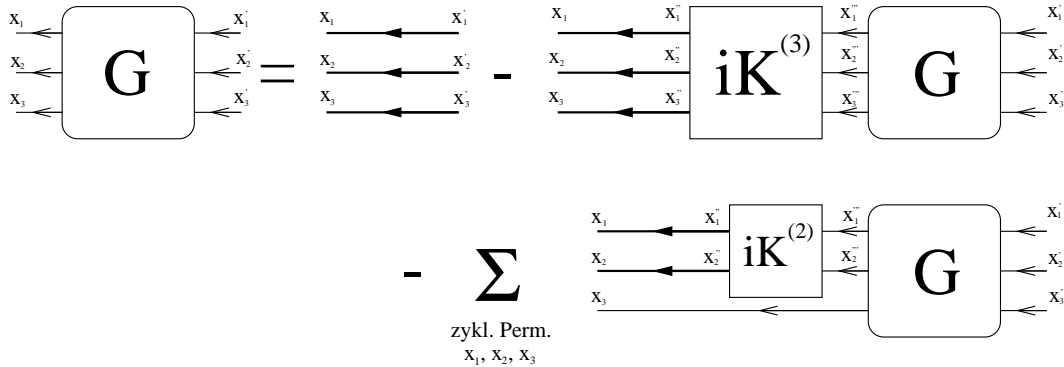


Abbildung 1.2: Die Integralgleichung für die 6-Punkt-Greensfunktion. $K^{(2)}$ und $K^{(3)}$ sind die irreduziblen Kerne.

Gleichung (1.4) enthält folgende Bestandteile:

- $S_{i\alpha\alpha'}^F(x_i, x'_i) = \langle 0 | T \Psi_\alpha^i(x_i) \bar{\Psi}_{\alpha'}^i(x'_i) | 0 \rangle$ ist der volle Quarkpropagator für das i -te Quark. Aufgrund der Translationsinvarianz der Theorie hängt der Feynmanpropagator S^F nur von der translationsinvarianten Koordinatendifferenz $x_i - x'_i$ ab, so daß für die Fouriertransformierte gilt:

$$S_i^F(x_i, x'_i) = S_i^F(x_i - x'_i) \equiv \int \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} e^{-ip_i(x_i - x'_i)} S_i^F(p_i). \tag{1.5}$$

³Wir haben hier (und im folgenden) die Konvention gewählt, daß über doppelt vorkommende Indizes α, β, γ summiert wird.

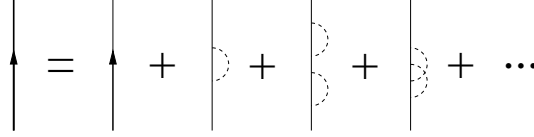


Abbildung 1.3: Störungsreihe für den vollen Quarkpropagator gemäß Gleichung (1.3)

- $K_{\alpha\alpha' \beta\beta'}^{(2)}(x_1, x_2; x'_1, x'_2)$ ist der irreduzible 2-Fermionen-Wechselwirkungskern. Er enthält die Summe aller irreduziblen Fermion-Fermion-Wechselwirkungsdiagramme, welche nicht durch Zerschneiden von nur zwei Fermionlinien zerlegt werden können (siehe Abb. 1.4).

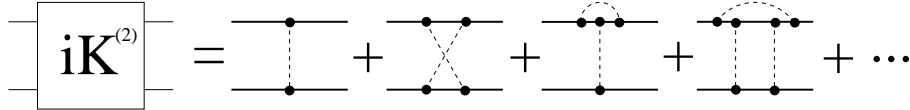


Abbildung 1.4: Der irreduzible 2-Teilchen-Wechselwirkungskern

- $K_{\alpha'\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}^{(3)}(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3)$ ist der irreduzible 3-Fermionen-Wechselwirkungskern. Entsprechend enthält er alle irreduziblen 3-Fermion-Wechselwirkungsdiagramme, die nicht durch zerschneiden von nur drei Fermionlinien zerlegt werden können (siehe Abb. 1.5).

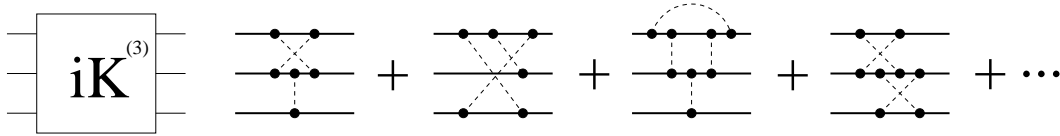


Abbildung 1.5: Der irreduzible 3-Teilchen-Wechselwirkungskern

Um im folgenden die Terme für den irreduziblen 3-Fermionen-Wechselwirkungskern und den irreduziblen 2-Fermionen-Wechselwirkungskern nicht explizit ausschreiben zu müssen, fassen wir mit einem technischen Trick beide Kerne $K^{(2)}$ und $K^{(3)}$ formal zu einem Ausdruck $K^{(2,3)}$ zusammen. Wir definieren

$$S_i^{F-1}(x_i - x'_i) \equiv \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{-ip_i(x_i - x'_i)} [S_i^F(p_i)]^{-1}, \quad (1.6)$$

wobei $[S_i^F(p_i)]^{-1}$ der inverse Propagator im Impulsraum ist mit

$$S_{i\gamma\gamma''}^F(p_i) [S_i^F(p_i)]_{\gamma''\gamma'}^{-1} = \delta_{\gamma\gamma'}. \quad (1.7)$$

Dann gilt:

$$\int d^4 x_i'' S_{i\gamma\gamma''}^F(x_i, x_i'') S_{i\gamma''\gamma'}^{F-1}(x_i'' - x'_i) = \delta_{\gamma\gamma'} \delta^{(4)}(x_i - x'_i). \quad (1.8)$$

Wir setzen nun (vergl. Abb. 1.6)

$$K_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}^{(2,3)}(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) \equiv$$

$$K_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}^{(3)}(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) + \sum_{\substack{\text{zykl. Perm.} \\ [(1,\alpha)(2,\beta)(3,\gamma)]}} K_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}^{(2)}(x_1, x_2; x'_1, x'_2) S_{3 \gamma\gamma'}^{F-1}(x_3 - x'_3). \quad (1.9)$$

The diagram shows a box labeled $iK^{(2,3)}$ with six external lines. This is equal to a box labeled $iK^{(3)}$ with six external lines, plus a sum over cyclic permutations of a box labeled $iK^{(2)}$ with four external lines, which is connected to a circle labeled S^{F-1} with two external lines.

Abbildung 1.6: Zusammenfassung der irreduziblen Kerne $K^{(2)}$ und $K^{(3)}$ zu $K^{(2,3)}$. Der ausgefüllte Kreis kennzeichnet einen inversen Propagator.

Mit diesem zusammengefaßten Kern $K^{(2,3)}$ schreibt sich dann Gleichung (1.4) wegen der Identität (1.8) in der kompakteren Form (vergl. Abb. 1.7):

$$G_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) = S_{1\alpha\alpha'}^F(x_1, x'_1) S_{2\beta\beta'}^F(x_2, x'_2) S_{3\gamma\gamma'}^F(x_3, x'_3) \\ - i \int d^4x_1'' d^4x_2'' d^4x_3'' d^4x_1''' d^4x_2''' d^4x_3''' S_{1\alpha\alpha''}^F(x_1, x_1'') S_{2\beta\beta''}^F(x_2, x_2'') S_{3\gamma\gamma''}^F(x_3, x_3'') \\ K_{\alpha''\alpha''' \beta''\beta''' \gamma''\gamma'''}^{(2,3)}(x_1'', x_2'', x_3''; x_1''', x_2''', x_3''') G_{\alpha''' \alpha' \beta''' \beta' \gamma''' \gamma'}(x_1''', x_2''', x_3'''; x'_1, x'_2, x'_3). \quad (1.10)$$

The diagram shows a box labeled G with six external lines. This is equal to the same box G minus the integral of a box labeled G with four external lines, connected to a box labeled $iK^{(2,3)}$ with four external lines, which is then connected to another box labeled G with six external lines.

Abbildung 1.7: Die Integralgleichung für die 6-Punkt-Greensfunktion mit formal zusammengefaßten Kernen $K^{(2,3)}$.

Die Integralgleichung (1.10) kann durch Änderung der Reihenfolge von $S_1^F S_2^F S_3^F$ und G auf der rechten Seite in die äquivalente adjungierte Integralgleichung umgeschrieben werden (vergl. Abb.1.8):

$$G_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) = S_{1\alpha\alpha'}^F(x_1, x'_1) S_{2\beta\beta'}^F(x_2, x'_2) S_{3\gamma\gamma'}^F(x_3, x'_3) \\ - i \int d^4x_1'' d^4x_2'' d^4x_3'' d^4x_1''' d^4x_2''' d^4x_3''' G_{\alpha\alpha'' \beta\beta'' \gamma\gamma''}(x_1, x_2, x_3; x_1'', x_2'', x_3'') \\ K_{\alpha''\alpha''' \beta''\beta''' \gamma''\gamma'''}^{(2,3)}(x_1'', x_2'', x_3''; x_1''', x_2''', x_3''') S_{1\alpha''' \alpha'}^F(x_1''', x'_1) S_{2\beta''' \beta'}^F(x_2''', x'_2) S_{3\gamma''' \gamma'}^F(x_3''', x'_3). \quad (1.11)$$

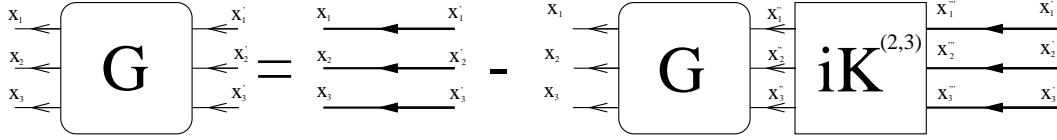


Abbildung 1.8: Die adjungierte Integralgleichung für die 6-Punkt-Greensfunktion.

Wir wollen nun mit Hilfe von (1.10) bzw. (1.11) die Bethe-Salpeter-Gleichung herleiten. Dazu ist es einfacher, die Integralgleichung für die Greensfunktion in den Impulsraum zu transformieren. Um die Schwerpunktskoordinate abseparieren zu können, führen wir zunächst folgende Jacobi-Koordinaten ein:

$$X \equiv \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad \xi \equiv x_1 - x_2, \quad \eta \equiv \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2x_3). \quad (1.12)$$

Die dazu kanonisch konjugierten Impulse sind

$$P \equiv p_1 + p_2 + p_3, \quad p_\xi \equiv \frac{1}{2}(p_1 - p_2), \quad p_\eta \equiv \frac{1}{3}(p_1 + p_2 - 2p_3), \quad (1.13)$$

wobei P den Gesamt-4er-Impuls des Systems beschreibt. Für gleiche Zeiten $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0$ entsprechen \vec{X} , $\vec{\xi}$ und $\vec{\eta}$ im nichtrelativistischen Grenzfall den Schwerpunkts- und Relativkoordinaten eines Systems von drei Teilchen gleicher Masse.

Für unser Problem ist jedoch die Wahl dieser Koordinaten (auch bei ungleichen Massen) willkürlich, und bis auf den Gesamt-4er-Impuls P haben diese Koordinaten im allgemeinen keine direkte physikalische Bedeutung.

Die Inversen der Transformationen (1.12) und (1.13) lauten

$$x_1 = X + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{3}\eta, \quad x_2 = X - \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{3}\eta, \quad x_3 = X - \frac{2}{3}\eta \quad (1.14)$$

und

$$p_1 = \frac{1}{3}P + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta, \quad p_2 = \frac{1}{3}P - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta, \quad p_3 = \frac{1}{3}P - p_\eta. \quad (1.15)$$

Für die Koordinaten gilt dann

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = PX + p_\xi \xi + p_\eta \eta, \quad (1.16)$$

und die Jacobi-Determinanten der Transformationen (1.12) und (1.13) und deren Inversen sind gleich Eins:

$$\left| \frac{\partial(X, \xi, \eta)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \right| = 1, \quad \left| \frac{\partial(P, p_\xi, p_\eta)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} \right| = 1. \quad (1.17)$$

Aufgrund der Raum-Zeit-Translationsinvarianz von G und $K^{(2,3)}$ dürfen diese nur von translationsinvarianten Koordinaten abhängen, also von ξ , η , ξ' , η' und $X - X'$.

Wir definieren daher die Fouriertransformierte von G durch

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) &= G(X - X', \xi, \eta, \xi', \eta') \\ &\equiv \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} e^{-iP(X-X')} \int \frac{d^4 p_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_\eta}{(2\pi)^4} e^{-ip_\xi \xi} e^{-ip_\eta \eta} \int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_\eta}{(2\pi)^4} e^{ip'_\xi \xi'} e^{ip'_\eta \eta'} \\ &\quad \times G(P, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) \end{aligned} \quad (1.18)$$

und entsprechend diejenige von $K^{(2,3)}$ durch

$$\begin{aligned} K^{(2,3)}(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) &= K^{(2,3)}(X - X', \xi, \eta, \xi', \eta') \\ &\equiv \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} e^{-iP(X-X')} \int \frac{d^4 p_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_\eta}{(2\pi)^4} e^{-ip_\xi \xi} e^{-ip_\eta \eta} \int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_\eta}{(2\pi)^4} e^{ip'_\xi \xi'} e^{ip'_\eta \eta'} \\ &\quad \times K^{(2,3)}(P, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Schließlich definieren wir für eine kompaktere Schreibweise noch das Produkt der inversen 1-Teilchen-Propagatoren im Impulsraum:

$$\begin{aligned} I_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(P, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) &\equiv (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p_\xi - p'_\xi) \delta^{(4)}(p_\eta - p'_\eta) \\ &\quad \times \left[S_1^F\left(\frac{1}{3}P + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \right]_{\alpha\alpha'}^{-1} \left[S_2^F\left(\frac{1}{3}P - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \right]_{\beta\beta'}^{-1} \left[S_3^F\left(\frac{1}{3}P - p_\eta\right) \right]_{\gamma\gamma'}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Mit diesen Definitionen und den Eigenschaften der Jacobi-Koordinaten (1.16) und (1.17) erhält man aus (1.10) die Integralgleichung für die Greensfunktion im Impulsraum:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p''_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p''_\eta}{(2\pi)^4} \left(I(P, p_\xi, p_\eta, p''_\xi, p''_\eta) + iK^{(2,3)}(P, p_\xi, p_\eta, p''_\xi, p''_\eta) \right) G(P, p''_\xi, p''_\eta, p'_\xi, p'_\eta) \\ = \mathbf{1} (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p_\xi - p'_\xi) \delta^{(4)}(p_\eta - p'_\eta) \end{aligned} \quad (1.21)$$

mit $\mathbf{1}_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'} \equiv \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\gamma\gamma'}$. Entsprechend bekommen wir aus (1.11) die adjungierte Integralgleichung im Impulsraum:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p''_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p''_\eta}{(2\pi)^4} G(P, p_\xi, p_\eta, p''_\xi, p''_\eta) \left(I(P, p''_\xi, p''_\eta, p'_\xi, p'_\eta) + iK^{(2,3)}(P, p''_\xi, p''_\eta, p'_\xi, p'_\eta) \right) \\ = \mathbf{1} (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p_\xi - p'_\xi) \delta^{(4)}(p_\eta - p'_\eta). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Zum Abschluß dieses Abschnitts geben wir noch die explizite Form des aus den irreduziblen 2-Fermionen- und 3-Fermionen-Wechselwirkungskernen $K^{(2)}$ und $K^{(3)}$ zusammengesetzten Kernes $K^{(2,3)}$ im Impulsraum an. Dazu definieren wir zunächst zwei zu $p_{\xi_3} \equiv p_\xi$ und $p_{\eta_3} \equiv p_\eta$ äquivalente Sätze von Relativimpulsen, die aus diesen durch zyklische Permutationen der Teilchenindizes hervorgehen:

$$p_{\xi_i} \equiv \frac{1}{2}(p_j - p_k), \quad p_{\eta_i} \equiv \frac{1}{3}(p_j - p_k - 2p_i) \quad \text{für } (ijk) = (123) \text{ und } (231). \quad (1.23)$$

Der bisherige Satz (1.13) entspricht $(ijk) = (312)$, und die neuen Relativimpulse gehen aus diesen durch eine lineare Transformation mit Determinante Eins hervor:

$$\begin{pmatrix} p_\xi \\ p_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{\xi_3} \\ p_{\eta_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{\xi_1} \\ p_{\eta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{\xi_2} \\ p_{\eta_2} \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Zur Definition der Fouriertransformierten des 2-Fermionen-Kernes $K^{(2)}(x_j, x_k, x'_j, x'_k)$, der die Wechselwirkung zwischen den Teilchen j und k beschreibt, führen wir für die Koordinaten x_j und x_k die 2-Teilchen-Koordinaten

$$X_i^{(2)} \equiv \frac{1}{2}(x_j + x_k), \quad x_i^{(2)} \equiv x_j - x_k \quad \text{mit } (ijk) = \text{zykl. Perm. von } (123) \quad (1.25)$$

ein. Die hierzu kanonisch konjugierten Impulse sind:

$$P_i^{(2)} \equiv p_j + p_k = \frac{2}{3}P + p_{\eta_i}, \quad p_i^{(2)} \equiv \frac{1}{2}(p_j - p_k) = p_{\xi_i} \quad (1.26)$$

$P_i^{(2)}$ ist also der Gesamtimpuls der zwei Teilchen j und k. Wieder die Translationsinvarianz ausnuttend wird die Fouriertransformierte für den irreduziblen 2-Fermionen-Wechselwirkungskern $K^{(2)}(j, k)$ durch

$$\begin{aligned} K^{(2)}(x_j, x_k, x'_j, x'_k) &= K^{(2)}(X_i^{(2)} - X_i'^{(2)}, x_i^{(2)}, x_i'^{(2)}) \\ &\equiv \int \frac{d^4 P_i^{(2)}}{(2\pi)^4} e^{-iP_i^{(2)}(X_i^{(2)} - X_i'^{(2)})} \int \frac{d^4 p_i^{(2)}}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_i'^{(2)}}{(2\pi)^4} e^{-ip_i^{(2)} x_i^{(2)}} e^{ip_i'^{(2)} x_i'^{(2)}} K^{(2)}(P_i^{(2)}, p_i^{(2)}, p_i'^{(2)}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

definiert. Mit der Fouriertransformierten (1.19) von $K^{(2,3)}$ und Gleichung (1.9) finden wir dann:

$$\begin{aligned} K_{\alpha_1 \alpha'_1 \alpha_2 \alpha'_2 \alpha_3 \alpha'_3}^{(2,3)}(P, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) &= \\ K_{\alpha_1 \alpha'_1 \alpha_2 \alpha'_2 \alpha_3 \alpha'_3}^{(3)}(P, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) &+ \\ + \sum_{\substack{(ijk)= \\ (123), (231), (312)}} K_{\alpha_j \alpha'_j \alpha_k \alpha'_k}^{(2)}\left(\frac{2}{3}P + p_{\eta_i}, p_{\xi_i}, p'_{\xi_i}\right) \left[S_i^F\left(\underbrace{\frac{1}{3}P - p_{\eta_i}}_{=p_i}\right) \right]_{\alpha_i \alpha'_i}^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\eta_i} - p'_{\eta_i}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.2 Gebundene qq̄q-Zustände als Pole der Greenschen Funktion

Wir wollen nun den Anteil gebundener 3-Quark-Zustände an der Greenschen Funktion bestimmen. Wie in der relativistischen Quantenfeldtheorie üblich, identifizieren wir gebundene Zustände und Resonanzen der Masse M mit Polen der Greensfunktion G als Funktion des invarianten Quadrates des Gesamtimpulses P an der Stelle $P^2 = M^2$. Mit Hilfe einer Laurent-entwicklung um einen solchen Pol wird es uns möglich sein, simultan

- eine homogene Integralgleichung für die Amplitude herzuleiten, welche den gebundenen Zustand beschreiben soll - diese Amplitude ist die sogenannte Bethe-Salpeter-Amplitude,
- die Normierung dieser Amplitude festzulegen (Normierungsbedingung).

Die 6-Punkt-Greensfunktion (1.1) beschreibt ganz allgemein die Propagation dreier miteinander wechselwirkender Fermionen. Dabei ist noch nicht festgelegt, ob die Propagation über Streuzustände oder über die Bildung eines gebundenen Zustands erfolgt. Ebenso kann das einzelne Fermion ein Quark q oder ein Antiquark \bar{q} sein: sämtliche Konfigurationen qqq , $qq\bar{q}$, $q\bar{q}\bar{q}$, $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ der Propagation sind in G enthalten. Letzteres wird durch die Zeitordnung bestimmt.

Um die Propagation eines Baryons, also eines vorwärts in der Zeit propagierenden qq̄q-Zustandes positiver Energie zu beschreiben, betrachten wir nur den Anteil von G mit der Zeitordnung $x_1^0, x_2^0, x_3^0 > x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0$, der proportional ist zu

$$\theta\left(\min(x_1^0, x_2^0, x_3^0) - \max(x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0)\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_1^0, x_2^0, x_3^0 > x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.29)$$

also:

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) = \\
- \langle 0 | T \left(\Psi_\alpha^1(x_1) \Psi_\beta^2(x_2) \Psi_\gamma^3(x_3) \right) T \left(\bar{\Psi}_{\alpha'}^1(x'_1) \bar{\Psi}_{\beta'}^2(x'_2) \bar{\Psi}_{\gamma'}^3(x'_3) \right) | 0 \rangle \\
\times \theta \left(\min(x_1^0, x_2^0, x_3^0) - \max(x'_1{}^0, x'_2{}^0, x'_3{}^0) \right) \\
+ \text{Terme von anderen Zeitordnungen.}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Im folgenden bezeichne $|\bar{P}\rangle$ den Zustandsvektor⁴ eines gebundenen qqq -Systems mit

- 4er-Impuls $\bar{P} = (\omega_P, \vec{P})$
- Masse $M = \sqrt{\bar{P}^2}$
- Energie $\omega_P = \sqrt{|\vec{P}|^2 + M^2}$.

Um nun aus (1.30) den Anteil gebundener qqq -Zustände zu extrahieren, schieben wir einen vollständigen Satz gebundener Zwischenzustände $|\bar{P}\rangle$ mit Masse M ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) = \\
- \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3 2\omega_P} \langle 0 | T \Psi_\alpha^1(x_1) \Psi_\beta^2(x_2) \Psi_\gamma^3(x_3) | \bar{P} \rangle \langle \bar{P} | T \bar{\Psi}_{\alpha'}^1(x'_1) \bar{\Psi}_{\beta'}^2(x'_2) \bar{\Psi}_{\gamma'}^3(x'_3) | 0 \rangle \\
\times \theta \left(\min(x_1^0, x_2^0, x_3^0) - \max(x'_1{}^0, x'_2{}^0, x'_3{}^0) \right) \\
+ \text{Terme, die nicht von gebundenen } qqq\text{-Zuständen der Masse M herrühren.}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Die Zwischenzustände $|\bar{P}\rangle$ sind dabei entsprechend der Gleichung

$$\langle \bar{P} | \bar{P}' \rangle = (2\pi)^3 2\omega_P \delta^{(3)}(\vec{P} - \vec{P}') \tag{1.32}$$

lorentzinvariant normiert.

Wir definieren nun die 3-Fermionen-**Bethe-Salpeter-Amplitude** für den gebundenen Zustand $|\bar{P}\rangle$ als

$$\chi_{\bar{P} \alpha\beta\gamma}(x_1, x_2, x_3) \equiv \langle 0 | T \Psi_\alpha^1(x_1) \Psi_\beta^2(x_2) \Psi_\gamma^3(x_3) | \bar{P} \rangle \tag{1.33}$$

und die **adjungierte Bethe-Salpeter-Amplitude** als

$$\bar{\chi}_{\bar{P} \alpha'\beta'\gamma'}(x_1, x_2, x_3) \equiv \langle \bar{P} | T \bar{\Psi}_{\alpha'}^1(x'_1) \bar{\Psi}_{\beta'}^2(x'_2) \bar{\Psi}_{\gamma'}^3(x'_3) | 0 \rangle. \tag{1.34}$$

Nach (1.31) können wir dann im Ortsraum den Anteil gebundener Zustände an der Greensfunktion durch die Salpeter-Amplituden $\chi_{\bar{P}}$ und $\bar{\chi}_{\bar{P}}$ darstellen:

$$G_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) =$$

⁴Das Baryon als gebundener qqq -Zustand ist natürlich nicht nur durch seine Masse M und den 4er-Impuls \bar{P} spezifiziert, sondern besitzt noch die Quantenzahlen Spin (Gesamtdrehimpuls) und Parität J^π , sowie die Flavourquantenzahlen Isospin T und Strangeness S^* , die wir zusammenfassen in $\lambda = (J^\pi, T, S^*)$. Der Zustandsvektor eines gebundenen qqq -Systems ist also eigentlich bezeichnet durch $|\bar{P}, \lambda\rangle$. Für die Diskussion an dieser Stelle sind die Quantenzahlen allerdings unerheblich und werden nicht kenntlich gemacht.

$$\begin{aligned}
& - \int \frac{d^3 P}{(2\pi)^3 2\omega_P} \chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(x_1, x_2, x_3) \bar{\chi}_{\bar{P} \alpha' \beta' \gamma'}(x'_1, x'_2, x'_3) \\
& \quad \times \theta \left(\min(x_1^0, x_2^0, x_3^0) - \max(x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0) \right) \\
& + \text{Terme, die nicht von gebundenen qq̄q-Zuständen der Masse } M \text{ herrühren.} \quad (1.35)
\end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang soll nun im Impulsraum formuliert werden. Dazu separieren wir zunächst - wie im Anhang A.1 dargestellt - die Schwerpunktskoordinate X ab, um Bethe-Salpeter-Amplituden zu erhalten, die nur noch von den Relativkoordinaten ξ und η abhängen (siehe Gleichungen A.5 bis A.8):

$$\chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(x_1, x_2, x_3) = e^{-iX\bar{P}} \chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(\xi, \eta), \quad \bar{\chi}_{\bar{P} \alpha' \beta' \gamma'}(x'_1, x'_2, x'_3) = e^{iX'\bar{P}} \bar{\chi}_{\bar{P} \alpha' \beta' \gamma'}(\xi', \eta') \quad (1.36)$$

mit

$$\begin{aligned}
\chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(\xi, \eta) & \equiv \langle 0 | T \Psi_\alpha \left(\frac{1}{2} \xi + \frac{1}{3} \eta \right) \Psi_\beta^2 \left(-\frac{1}{2} \xi + \frac{1}{3} \eta \right) \Psi_\gamma^3 \left(\frac{2}{3} \eta \right) | \bar{P} \rangle \\
\bar{\chi}_{\bar{P} \alpha' \beta' \gamma'}(\xi', \eta') & \equiv \langle \bar{P} | T \bar{\Psi}_{\alpha'}^1 \left(\frac{1}{2} \xi' + \frac{1}{3} \eta' \right) \bar{\Psi}_{\beta'}^2 \left(-\frac{1}{2} \xi' + \frac{1}{3} \eta' \right) \bar{\Psi}_{\gamma'}^3 \left(\frac{2}{3} \eta' \right) | 0 \rangle. \quad (1.37)
\end{aligned}$$

Für diese 'schwerpunktseparierten' Bethe-Salpeter-Amplituden definieren wir die Fouriertransformierten durch

$$\chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(\xi, \eta) \equiv \int \frac{d^4 p_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_\eta}{(2\pi)^4} e^{-ip_\xi \xi} e^{-ip_\eta \eta} \chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(p_\xi, p_\eta) \quad (1.38)$$

$$\bar{\chi}_{\bar{P} \alpha' \beta' \gamma'}(\xi', \eta') \equiv \int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_\eta}{(2\pi)^4} e^{ip'_\xi \xi'} e^{ip'_\eta \eta'} \bar{\chi}_{\bar{P} \alpha' \beta' \gamma'}(p'_\xi, p'_\eta). \quad (1.39)$$

Der Zusammenhang zwischen der Greensfunktion G und den Bethe-Salpeter-Amplituden im Impulsraum wird ausführlich im Anhang A.4 hergeleitet. Es zeigt sich, daß gerade die Funktion θ in den Zeitvariablen für einen gebundenen Zustand $P^2 \rightarrow M^2$ (oder $P^0 \rightarrow \omega_P$) zu einem Pol der Greensfunktion $G(P, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta)$ führt:

$$\begin{aligned}
G_{\alpha \alpha' \beta \beta' \gamma \gamma'}(P, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) & = \frac{-i}{2\omega_P} \frac{\chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(p_\xi, p_\eta) \bar{\chi}_{\bar{P} \alpha' \beta' \gamma'}(p'_\xi, p'_\eta)}{P^0 - \omega_P + i\epsilon} \\
& + \text{reguläre Terme für } P^0 \rightarrow \omega_P. \quad (1.40)
\end{aligned}$$

Gleichung (1.40) kann durch eine einfache Rechnung auch in die kovariante Form

$$\begin{aligned}
G_{\alpha \alpha' \beta \beta' \gamma \gamma'}(P, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) & = -i \frac{\chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(p_\xi, p_\eta) \bar{\chi}_{\bar{P} \alpha' \beta' \gamma'}(p'_\xi, p'_\eta)}{P^2 - M^2 + i\epsilon} \\
& + \text{reguläre Terme für } P^2 \rightarrow M^2 \quad (1.41)
\end{aligned}$$

umgeschrieben werden.

Wir fassen zusammen:

- Ein gebundener Zustand des qq̄q-Systems führt in der Greenschen Funktion G im Impulsraum zu einem Pol erster Ordnung in der Variablen P^0 an der Stelle $P^0 = \omega_P$ (bzw. kovariant in der Variablen P^2 an der Stelle $P^2 = M^2$).

$$\lim_{P^2 \rightarrow M^2} G = \chi \frac{-i}{P^2 - M^2 + i\epsilon} \bar{\chi}$$

Abbildung 1.9: Polbeiträge eines gebundenen Zustandes der Masse M zur 3-Fermionen-Greensfunktion und die Bedeutung der Salpeter-Amplituden.

- Das Residuum von G am Pol $P^2 = M^2$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{|P^2=M^2} G(P, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) &= \lim_{P^2 \rightarrow M^2} (P^2 - M^2) G(P, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) \\ &= -i \chi_{\bar{P}}(p_\xi, p_\eta) \bar{\chi}_{\bar{P}}(p'_\xi, p'_\eta) \end{aligned} \quad (1.42)$$

ist gerade das Produkt⁵ der Bethe-Salpeter-Amplitude mit der adjungierten Bethe-Salpeter-Amplitude. Das bedeutet, daß auf der Massenschale des gebundenen Zustands (= Pol der Greensfunktion) die Abhängigkeit von den Relativimpulsen p_ξ, p_η und p'_ξ, p'_η separiert (siehe Abbildung 1.9). Diesen Sachverhalt werden wir im nächsten Abschnitt ausnutzen, um aus der inhomogenen Integralgleichung (1.4) für die Greensfunktion eine homogene Integralgleichung für die Bethe-Salpeter-Amplituden zu bestimmen.

1.3 Herleitung der Bethe-Salpeter-Gleichung und der Normierungsbedingung

In diesem Abschnitt werden wir aus der analytischen Struktur der Greensfunktion G (als Funktion von P^0) an ihren Polen und der Integralgleichung für G simultan die Gleichung für die Bethe-Salpeter-Amplituden (Bethe-Salpeter-Gleichung) und die Normierung der Amplituden (Normierungsbedingung) herleiten. Die hier verwendete Methode stammt ursprünglich von Petry [10] und wurde in der Arbeit von Münz [10] zur Herleitung der Bethe-Salpeter-Gleichung und Normierungsbedingung für Mesonen ($q\bar{q}$) verwendet.

Im Abschnitt 1.1 haben wir die Integralgleichung (1.21) und die adjungierte Integralgleichung (1.22) für die 6-Punkt-Greensfunktion im Impulsraum präsentiert. Wir können die Gleichungen (1.21) und (1.22) als Operatorgleichungen auffassen und definieren daher für eine kompaktere Notation das Operatorprodukt

$$\begin{aligned} [I_P G_P]_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(p_\xi, p_\eta; p'_\xi, p'_\eta) \\ \equiv \int \frac{d^4 p''_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p''_\eta}{(2\pi)^4} I_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(P, p_\xi, p_\eta, p''_\xi, p''_\eta) G_{\alpha''\alpha' \beta''\beta' \gamma''\gamma'}(P, p''_\xi, p''_\eta, p'_\xi, p'_\eta), \end{aligned} \quad (1.44)$$

wobei wir uns die Operatoren parametrisch von dem 4er-Vektor P abhängig denken. Mit

$$\mathbb{1}_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) \equiv (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p_\xi - p'_\xi) \delta^{(4)}(p_\eta - p'_\eta) \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\gamma\gamma'} \quad (1.45)$$

schreibt sich dann die Integralgleichung (1.21) für die Greensfunktion G_P , sowie die dazu adjungierte Integralgleichung (1.22) in der kompakten Form

$$(I_P + iK_P^{(2,3)})G_P = \mathbb{1}, \quad G_P(I_P + iK_P^{(2,3)}) = \mathbb{1}. \quad (1.46)$$

⁵Wir verwenden die Notation

$$[\chi_P(p_\xi, p_\eta) \bar{\chi}_P(p'_\xi, p'_\eta)]_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'} \equiv \chi_{P \alpha\beta\gamma}(p_\xi, p_\eta) \bar{\chi}_{P \alpha'\beta'\gamma'}(p'_\xi, p'_\eta). \quad (1.43)$$

Wir fassen nun noch die Summe des inversen freien⁶ qqq -Quarkpropagators I_P und der zusammengefaßten irreduziblen Wechselwirkungskerne $K_P^{(2,3)}$ zu dem Pseudo-Hamiltonoperator H_P zusammen

$$H_P \equiv (I_P + iK_P^{(2,3)}) , \quad (1.47)$$

der wie G_P parametrisch vom 4er-Impuls P abhängt. Die Gleichung für die Greensfunktion lautet damit

$$H_P G_P = \mathbf{1} \quad (1.48)$$

und die adjungierte Gleichung

$$G_P H_P = \mathbf{1} . \quad (1.49)$$

1.3.1 Laurententwicklung der Greensfunktion

Um nun die Bethe-Salpeter-Gleichung für die Bethe-Salpeter-Amplituden und ihre Normierungsbedingung zu erhalten, nutzen wir die analytische Struktur der Greensfunktion G_P als Funktion von P^0 aus:

- Wir entwickeln die Greensche Funktion G_P in der Variablen P^0 um $\omega_P = \sqrt{|\vec{P}|^2 + M^2}$ (Laurententwicklung).
Mit dem Endresultat (1.40) im Abschnitt 1.2 erhalten wir folgende Entwicklung von G_P beginnend mit der Ordnung $(P^0 - \omega_P)^{-1}$:

$$G_P = \frac{-i}{2\omega_P} \frac{\chi_{\vec{P}} \bar{\chi}_{\vec{P}}}{P^0 - \omega_P + i\epsilon} + \frac{\partial}{\partial P^0} \left[(P^0 - \omega_P) G_P \right]_{P^0=\omega_P} + \mathcal{O}(P^0 - \omega_P) . \quad (1.50)$$

Zu bemerken ist hier, daß die P^0 -Abhängigkeit im Term der Ordnung $(P^0 - \omega_P)^{-1}$ tatsächlich nur im Nenner steht, da die Bethe-Salpeter-Amplituden $\chi_{\vec{P}}$ und $\bar{\chi}_{\vec{P}}$ nicht von P^0 abhängig sind; man beachte die Notation $\vec{P} = (\omega_P, \vec{P})$, $P = (P^0, \vec{P})$.

- Wir entwickeln ebenfalls den Pseudo-Hamiltonoperator H_P als Funktion von P^0 in eine Potenzreihe um $\omega_P = \sqrt{|\vec{P}|^2 + M^2}$ (Taylorentwicklung) unter der Annahme, daß H_P analytisch ist:

$$H_P = H_{\vec{P}} + \frac{\partial}{\partial P^0} H_P \Big|_{P^0=\omega_P} (P^0 - \omega_P) + \mathcal{O}((P^0 - \omega_P)^2) \quad (1.51)$$

Die Entwicklungen (1.50) und (1.51) werden in die Integralgleichung (1.48) $H_P G_P = \mathbf{1}$ eingesetzt und wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \underbrace{-i H_{\vec{P}} \frac{\chi_{\vec{P}} \bar{\chi}_{\vec{P}}}{(2\omega_P) P^0 - \omega_P + i\epsilon}}_{\text{Ordnung } -1} \\ & + \underbrace{H_{\vec{P}} \frac{\partial}{\partial P^0} \left[(P^0 - \omega_P) G_P \right]_{P^0=\omega_P} - i \frac{\partial}{\partial P^0} H_P \Big|_{P^0=\omega_P} \frac{\chi_{\vec{P}} \bar{\chi}_{\vec{P}}}{2\omega_P}}_{\text{Ordnung } 0} + \underbrace{\mathcal{O}(P^0 - \omega_P)}_{\text{Ordnungen } \geq 1} \\ & = \underbrace{\mathbf{1}}_{\text{Ordnung } 0} . \end{aligned} \quad (1.52)$$

Der Vergleich der Koeffizienten zu den verschiedenen Ordnungen in der Entwicklung (1.52) liefert uns nun simultan die Bethe-Salpeter-Gleichung und die Normierungsbedingung:

⁶Mit 'frei' ist hier gemeint, daß zwischen den einzelnen Fermionen keine Wechselwirkung stattfindet, d.h. I_P ist immer noch Produkt der vollen inversen Einteilchenpropagatoren.

- Die Ordnung $(P^0 - \omega_P)^{-1}$ führt auf die Bethe-Salpeter-Gleichung.
- Die Ordnung $(P^0 - \omega_P)^0$ liefert die Normierungsbedingung.

1.3.2 Die Bethe-Salpeter-Gleichung

Aus dem Koeffizientenvergleich für die Ordnung $(P^0 - \omega_P)^{-1}$ resultiert zunächst

$$H_{\bar{P}} \chi_{\bar{P}} \bar{\chi}_{\bar{P}} = 0, \quad (1.53)$$

oder voll ausgeschrieben

$$\int \frac{d^4 p''_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p''_\eta}{(2\pi)^4} H_{\alpha\alpha''\beta\beta''\gamma\gamma''}(\bar{P}, p_\xi, p_\eta, p''_\xi, p''_\eta) \chi_{\bar{P}\alpha''\beta''\gamma''}(p''_\xi, p''_\eta) \bar{\chi}_{\bar{P}\alpha'\beta'\gamma'}(p'_\xi, p'_\eta) = 0. \quad (1.54)$$

Wir können nun den Sachverhalt ausnutzen, daß auf der Massenschale die Abhängigkeit von den Relativimpulsen separiert. Der Operator H_P wirkt hier nämlich nur auf $\chi_{\bar{P}}$, so daß schließlich nach Abspaltung von $\bar{\chi}_{\bar{P}}$ gilt

$$H_{\bar{P}} \chi_{\bar{P}} = 0. \quad (1.55)$$

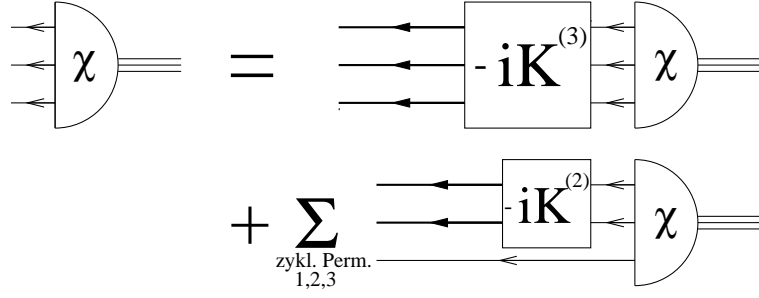
Hier ist das Operatorprodukt analog zu (1.44) definiert als

$$[H_{\bar{P}} \chi_{\bar{P}}]_{\alpha\beta\gamma}(p_\xi, p_\eta) \equiv \int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_\eta}{(2\pi)^4} H_{\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'}(\bar{P}, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) \chi_{\bar{P}\alpha'\beta'\gamma'}(p'_\xi, p'_\eta). \quad (1.56)$$

Dieses ist die gesuchte Gleichung für die Amplitude $\chi_{\bar{P}}$, die **Bethe-Salpeter-Gleichung**. Ausgeschrieben lautet diese homogene Integralgleichung im Impulsraum

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{P}\alpha\beta\gamma}(p_\xi, p_\eta) = & S_{1\alpha\alpha'}^F(\frac{1}{3}\bar{P} + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta) S_{2\beta\beta'}^F(\frac{1}{3}\bar{P} - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta) S_{3\gamma\gamma'}^F(\frac{1}{3}\bar{P} - p_\eta) \\ & \times (-i) \int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_\eta}{(2\pi)^4} K_{\alpha'\alpha''\beta'\beta''\gamma'\gamma''}^{(3)}(\bar{P}, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) \chi_{\bar{P}\alpha''\beta''\gamma''}(p'_\xi, p'_\eta) \\ & + S_{1\alpha\alpha'}^F(\frac{1}{3}\bar{P} + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta) S_{2\beta\beta'}^F(\frac{1}{3}\bar{P} - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta) \\ & \times (-i) \int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} K_{\alpha'\alpha''\beta'\beta''}^{(2)}(\frac{2}{3}\bar{P} + p_\eta, p_\xi, p'_\xi) \chi_{\bar{P}\alpha''\beta''\gamma}(p'_\xi, p_\eta) \\ & + S_{1\alpha\alpha'}^F(\frac{1}{3}\bar{P} + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta) S_{3\gamma\gamma'}^F(\frac{1}{3}\bar{P} - p_\eta) \\ & \times (-i) \int \frac{d^4 p'_{\xi 2}}{(2\pi)^4} K_{\alpha'\alpha''\gamma'\gamma''}^{(2)}(\frac{2}{3}\bar{P} + p_{\eta 2}, p_{\xi 2}, p'_{\xi 2}) \chi_{\bar{P}\alpha''\beta\gamma''}(p'_{\xi 2}, p_{\eta 2}) \\ & + S_{2\beta\beta'}^F(\frac{1}{3}\bar{P} - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta) S_{3\gamma\gamma'}^F(\frac{1}{3}\bar{P} - p_\eta) \\ & \times (-i) \int \frac{d^4 p'_{\xi 1}}{(2\pi)^4} K_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''}^{(2)}(\frac{2}{3}\bar{P} + p_{\eta 1}, p_{\xi 1}, p'_{\xi 1}) \chi_{\bar{P}\alpha\beta''\gamma''}(p'_{\xi 1}, p_{\eta 1}). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Eine diagrammatische Darstellung dieser homogenen Integralgleichung ist in Abbildung (1.10) gegeben.

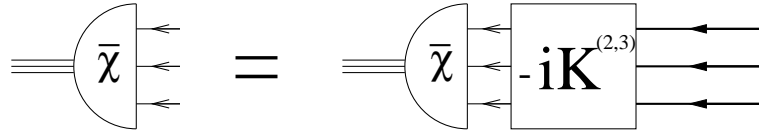
**Abbildung 1.10:** Diagrammatische Darstellung der Bethe-Salpeter-Gleichung

Wenn entsprechend die Entwicklungen (1.50) und (1.51) in die adjungierte Integralgleichung (1.49) $G_P H_P = \mathbb{1}$ eingesetzt werden, erhält man in analoger Weise die **adjungierte Bethe-Salpeter-Gleichung** für die adjungierte Amplitude $\bar{\chi}_P$

$$\bar{\chi}_P H_P = 0 \quad (1.58)$$

mit dem Operatorprodukt

$$[\bar{\chi}_P H_P]_{\alpha\beta\gamma}(p_\xi, p_\eta) \equiv \int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_\eta}{(2\pi)^4} \bar{\chi}_P{}_{\alpha'\beta'\gamma'}(p'_\xi, p'_\eta) H_{\alpha'\alpha\beta'\beta\gamma'\gamma}(\bar{P}, p'_\xi, p'_\eta, p_\xi, p_\eta) . \quad (1.59)$$

**Abbildung 1.11:** Die adjungierte Bethe-Salpeter-Gleichung mit formal zusammengefaßten Kernen $K^{(2,3)}$.

1.3.3 Die Normierungsbedingung

Aus dem Koeffizientenvergleich in (1.52) für die 0. Ordnung folgt

$$H_P \frac{\partial}{\partial P^0} [(P^0 - \omega_P) G_P]_{P^0=\omega_P} - i \frac{\partial}{\partial P^0} H_P \Big|_{P^0=\omega_P} \frac{\chi_P \bar{\chi}_P}{2\omega_P} = \mathbb{1} . \quad (1.60)$$

Multipliziert man nun von links mit der adjungierten Amplitude $\bar{\chi}_P$, so verschwindet wegen der adjungierten Bethe-Salpeter-Gleichung $\bar{\chi}_P H_P = 0$ der erste Term und wir bekommen die **Normierungsbedingung**

$$\bar{\chi}_P \frac{\partial}{\partial P^0} H_P \Big|_{P^0=\omega_P} \chi_P = i 2\omega_P . \quad (1.61)$$

Führen wir das Produkt explizit aus, so schreibt sich die Normierungsbedingung (1.61):

$$\int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_\eta}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p''_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p''_\eta}{(2\pi)^4} \bar{\chi}_P{}_{\alpha'\beta'\gamma'}(p'_\xi, p'_\eta) \frac{\partial}{\partial P^0} [H_{\alpha'\alpha''\beta'\beta''\gamma'\gamma''}(P, p'_\xi, p'_\eta, p''_\xi, p''_\eta)]_{P^0=\omega_P} \chi_P{}_{\alpha''\beta''\gamma''}(p''_\xi, p''_\eta) = i 2\omega_P \quad (1.62)$$

mit

$$H_{\alpha'\alpha''\beta'\beta''\gamma'\gamma''}(P, p'_\xi, p'_\eta, p''_\xi, p''_\eta) = \left[I + i K^{(2,3)} \right]_{\alpha'\alpha''\beta'\beta''\gamma'\gamma''}(P, p'_\xi, p'_\eta, p''_\xi, p''_\eta) . \quad (1.63)$$

Die Normierungsbedingung ist in Abbildung 1.12 diagrammatisch dargestellt. Sie ist zwar nicht

$$\equiv \left(\tilde{\chi} \right) \frac{d}{dP^0} \left(\left(\text{circle with 3 lines} \right)^{-1} + \boxed{iK^{(2,3)}} \right) \left(\chi \right) \equiv i 2\omega_p$$

Abbildung 1.12: Die Normierungsbedingung für die Bethe-Salpeter-Amplituden

explizit lorentzkovariant, gilt jedoch in dieser Form in einem beliebigen Bezugssystem, da sich beide Seiten der Gleichung (1.61) wie die Zeitkomponente eines 4er-Vektors transformieren. Gleichung (1.61) läßt sich aber in eine äquivalente explizit kovariante Form umschreiben:

$$\bar{\chi}_{\vec{P}} P^\mu \frac{\partial}{\partial P^\mu} H_P \Big|_{P^0=\omega_P} \chi_{\vec{P}} = i 2M^2 \quad (1.64)$$

Wir haben somit folgendes erreicht:

- Mit der Bethe-Salpeter-Gleichung (1.57) haben wir nun eine formal kovariante, homogene Integralgleichung für $8 \times 8 \times 8$ -komponentige Funktionen in den acht Variablen (p_ξ^0, \vec{p}_ξ) und (p_η^0, \vec{p}_η) gefunden. Sie ist von den vier Parametern (P^0, \vec{P}) abhängig. Für einen gegebenen Propagator S^F und gegebenen irreduziblen Wechselwirkungskernen $K^{(2)}$ und $K^{(3)}$ liefert die Lösung dieser Gleichung die Bethe-Salpeter-Amplitude $\chi_{\vec{P}}$ und Massen $P^2 = M^2$ für ein gebundenes System aus drei Fermionen (Quarks).
- Durch die Normierungsbedingung (1.61) wird zusätzlich eine Randbedingungen an die Lösungen dieser homogenen Integralgleichung gestellt. Randbedingungen dieser Art sind notwendig, um ein diskretes Spektrum $P^2 = M^2$ für die gebundenen Zustände zu erhalten.

Kapitel 2

Die instantane Näherung und die Salpeter-Gleichung

Die exakte Lösung der allgemeinen Bethe-Salpeter-Gleichung für hadronische Bindungszustände ist im Rahmen der QCD nicht möglich:

- Der Quarkpropagator S^F ist keine bekannte Funktion in der QCD. Um die Bethe-Salpeter-Gleichung exakt zu lösen, müßte man zunächst die Dyson-Schwinger-Gleichung für den 1-Teilchen-Propagator in der QCD lösen.
- Ebenso wie S^F sind auch die Wechselwirkungskerne $K^{(2)}$ und $K^{(3)}$ (als Summen von unendlich vielen Feynman-Graphen) unbekannte Funktionen. Sie müssen z.B. das Confinement der Quarks in einem Hadron realisieren; jedoch ist innerhalb der QCD die Confinement-Wechselwirkung zwischen den Quarks bis heute nicht richtig verstanden.

Darüberhinaus tritt allgemein (nicht nur in der QCD) ein weiteres Problem in der Bethe-Salpeter-Gleichung auf:

Im Gegensatz zur nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung enthält die Bethe-Salpeter-Amplitude $\chi_{\bar{P}}(\xi, \eta)$ die relativen Zeit-Variablen ξ^0 und η^0 , die dazu führen, daß im Impulsraum die Amplitude $\chi_{\bar{P}}(p_\xi, p_\eta)$ eine Funktion der Relativenergien p_ξ^0 und p_η^0 ist. Diese Abhängigkeit von den Relativenergien hat im allgemeinen eine komplizierte analytische Struktur der Bethe-Salpeter-Gleichung und damit prinzipielle und technische Probleme bei der Lösung dieser achtdimensionalen Gleichung zur Folge. Es gibt nur sehr wenige Beispiele, in denen die Bethe-Salpeter-Gleichung exakt gelöst werden kann. Das wohl bekannteste Beispiel im Fall der 2-Teilchen-Bethe-Salpeter-Gleichung ist das Modell von Wick [7] und Cutkosky [8], in dem zwei skalare Teilchen durch den Austausch eines masselosen skalaren Teilchens in Leiternäherung wechselwirken: In diesem Modell ist die Polstruktur so einfach, daß eine Wick-Rotation in der komplexen Ebene der Relativenergie ausgeführt werden kann.

Wir werden deshalb in dieser Arbeit nicht die volle Bethe-Salpeter-Gleichung zur Beschreibung gebundener 3-Quark-Zustände verwenden. Stattdessen umgehen wir wie in dem relativistischen Mesonmodell von Münz und Resag [10, 11] durch folgende Näherungen die oben genannten Probleme:

- Wir ersetzen den vollen Quarkpropagator durch den freien 1-Fermion-Propagator und führen damit in unser Modell effektive Konstituenten-Quarkmassen als Modellparameter ein. Diese Näherung entspricht dem Bild eines Hadrons als ein aus Konstituenten bestehendes, gebundenes System, analog zum nichtrelativistischen Quarkmodell.
- Wir vernachlässigen Retardierungseffekte in der Wechselwirkung, d.h. wir nehmen an, daß im Ruhesystem des Baryons die Wechselwirkungskerne unabhängig von den Relativener-

gien p_ξ^0 und p_η^0 sind (**instantane Näherung**), so daß die Kerne formal als Potentiale geschrieben werden können.

Wir tragen hiermit der Tatsache Rechnung, daß der dynamische Ursprung des Confinements in der QCD unverstanden ist. Stattdessen können wir nun versuchen, durch einen geeigneten Potentialansatz das Confinement zu parametrisieren. Im nichtrelativistischen Quarkmodell [21,22] liefern solche (z.B. linearen oder quadratischen) Potentialansätze für das Confinement eine realistische Beschreibung des Baryonen- und Mesonen-Spektrums. Auch QCD-Gitterrechnungen motivieren die Parametrisierung des Confinements mittels linear ansteigender Potentiale. Es hat zwar auch Versuche gegeben solche Potentialansätze für vier Dimensionen zu verallgemeinern, jedoch liefern diese Ansätze kein diskretes Spektrum [9].

Bei der Berechnung von Meson-Spektren und elektromagnetischer Eigenschaften von Mesonen im Bethe-Salpeter-Formalismus [10,11] lieferte dieses Konzept sehr gute Resultate, so daß auch in unserem Baryon-Modell ein solcher Ansatz adäquate Ergebnisse zu liefern verspricht.

Unabhängig von diesem Konzept werden wir zur weiteren Vereinfachung des Problems den irreduziblen 2-Teilchen-Wechselwirkungskern $K^{(2)}$ vernachlässigen. Ausgangspunkt für die weitere Vorgehensweise ist somit eine zur Meson-Bethe-Salpeter-Gleichung des Modells [10,11] ganz analoge Baryon-Bethe-Salpeter-Gleichung, die statt der freien Quark- und Antiquarkpropagatoren drei freie Quarkpropagatoren und statt des irreduziblen Fermion-Antifermion-Wechselwirkungskerns den irreduziblen 3-Fermionen-Wechselwirkungskern enthält.

Diese drei Näherungen stellen nicht nur in konzeptioneller Weise Vereinfachungen dar, sondern sie haben ebenfalls zur Folge, daß sich die Bethe-Salpeter-Gleichung technisch stark vereinfacht. Es wird sich nämlich zeigen, daß

1. mit der instantanen Näherung die p_ξ^0, p_η^0 -Abhängigkeit der Bethe-Salpeter-Gleichung im Ruhesystem vollständig eliminiert werden kann: Wir erhalten die sechs-dimensionale Reduktion der 3-Fermionen-Bethe-Salpeter-Gleichung - die (volle) **Salpeter-Gleichung**.
2. die instantane Näherung zu einer Projektorstruktur in der Salpeter-Gleichung führt, die die Zahl der unabhängigen Funktionen zur Beschreibung des Baryonzustandes stark reduziert.

2.1 Herleitung der Salpeter-Gleichung

2.1.1 Näherungen für das Quarkmodell

• Vernachlässigung des irreduziblen 2-Quark-Wechselwirkungskerns

In dem Modell, das wir in dieser Arbeit beschreiben, wird der irreduzible 2-Teilchen-Wechselwirkungskern vernachlässigt, d.h. wir setzen:

$$K^{(2)} = 0 . \quad (2.1)$$

Dieses geschieht in erster Linie, um das Problem zu vereinfachen. Darüberhinaus spielt bei Wechselwirkungen zweier Quarks i und j , die durch $K^{(2)}(i, j)$ beschrieben werden, das dritte Quark k die Rolle des 'Zuschauers' (mit (i, j, k) =zykl. Permutation von $(1, 2, 3)$). Die Greensfunktion erhält durch $K^{(2)}$ daher Anteile, welche Zustände beschreiben, in denen das 3-Quark-System in das freie Quark k (auf der Massenschale) und einen Bindungszustand aus den Quarks i und j separiert. Das widerspricht der Confinement-Hypothese. Mit $K^{(2)} = 0$ werden allerdings nicht nur diese Anteile der Greensfunktion fortgelassen, die in einen zusammenhängenden 2-Fermionen-Propagator und einen Ein-Fermion-Propagator zerfallen, sondern auch Anteile

des zusammenhängenden 3-Fermionen-Propagators, die für die Realisierung des Confinements durchaus wichtig sein könnten. Die Näherung (2.1) ist also eher technisch als physikalisch motiviert.

Ausgangspunkt für unser Baryonmodell ist damit die 3-Fermionen-Bethe-Salpeter-Gleichung (1.57) unter Vernachlässigung von $K^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(p_\xi, p_\eta) = & S_{1 \alpha \alpha'}^F \left(\frac{1}{3} \bar{P} + p_\xi + \frac{1}{2} p_\eta \right) S_{2 \beta \beta'}^F \left(\frac{1}{3} \bar{P} - p_\xi + \frac{1}{2} p_\eta \right) S_{3 \gamma \gamma'}^F \left(\frac{1}{3} \bar{P} - p_\eta \right) \\ & \times (-i) \int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_\eta}{(2\pi)^4} K_{\alpha' \alpha'' \beta' \beta'' \gamma' \gamma''}^{(3)}(\bar{P}, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) \chi_{\bar{P} \alpha'' \beta'' \gamma''}(p'_\xi, p'_\eta). \end{aligned} \quad (2.2)$$

•Die instantane Näherung

In der **instantanen Näherung** vernachlässigen wir im Ruhesystem des gebundenen 3-Quark-Zustandes mit 4er-Gesamtpuls $\bar{P} = (M, \vec{0})$ die Abhängigkeit von den Relativenergien p_ξ^0 und p_η^0 im 3-Quark-Bethe-Salpeter-Wechselwirkungskern:

$$K^{(3)}(\bar{P}, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) |_{\bar{P}=(M, \vec{0})} = V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta). \quad (2.3)$$

Um eine kovariante Formulierung für die Salpeter-Gleichung zu erhalten, können wir (2.3) auch kovariant schreiben [10, 11, 6]:

Dazu definieren wir die Komponenten der Relativimpulse p_ξ und p_η senkrecht und parallel zum 4er-Impuls \bar{P} des gebundenen Zustands:

$$p_{\xi \parallel \bar{P}} \equiv \frac{\bar{P} p_\xi}{\sqrt{\bar{P}^2}}, \quad p_{\xi \perp \bar{P}} \equiv p_\xi - \frac{\bar{P} p_\xi}{\bar{P}^2} \bar{P}, \quad p_{\eta \parallel \bar{P}} \equiv \frac{\bar{P} p_\eta}{\sqrt{\bar{P}^2}}, \quad p_{\eta \perp \bar{P}} \equiv p_\eta - \frac{\bar{P} p_\eta}{\bar{P}^2} \bar{P}. \quad (2.4)$$

Dann kann der Wechselwirkungskern in instantaner Näherung in einem beliebigen Bezugssystem (d.h. für beliebiges $\bar{P} = (\omega_P, \vec{P})$) geschrieben werden als

$$K^{(3)}(\bar{P}, p_\xi, p_\eta, p'_\xi, p'_\eta) = V(p_{\xi \perp \bar{P}}, p_{\eta \perp \bar{P}}, p_{\xi' \perp \bar{P}}, p_{\eta' \perp \bar{P}}). \quad (2.5)$$

Im Ruhesystem $\bar{P} = (M, \vec{0})$ gilt dann

$$p_{\xi \parallel \bar{P}=(M, \vec{0})} = p_\xi^0, \quad p_{\xi \perp \bar{P}=(M, \vec{0})} = (0, \vec{p}_\xi), \quad p_{\eta \parallel \bar{P}=(M, \vec{0})} = p_\eta^0, \quad p_{\eta \perp \bar{P}=(M, \vec{0})} = (0, \vec{p}_\eta), \quad (2.6)$$

und aus (2.5) folgt damit (2.3).

Die kovariante Formulierung gestattet, die Salpeter-Gleichung im Ruhesystem $\bar{P} = (M, \vec{0})$ zu lösen und die Lösung $\chi_{\bar{P}}$ in einem beliebigen Bezugssystem mit $\bar{P} = (\omega_P, \vec{P})$ durch eine passende Transformation (Boost) aus $\chi_{\bar{P}=(M, \vec{0})}$ zu bestimmen.

•Freie Quarkpropagatoren

Wir nähern die vollen Quarkpropagatoren S^F durch **freie** Propagatoren, also:

$$S_i^F(p_i) \approx \frac{i}{\gamma(p_i) - m_i + i\epsilon}. \quad (2.7)$$

Hiebei sind die Massen m_i , $i = 1, 2, 3$ die effektiven Konstituenten-Quark-Massen, die an dieser Stelle als Parameter des Modells eingeführt werden.

2.1.2 Die Salpeter-Gleichung und ihr Lösungsraum

Mit einem instantanen Wechselwirkungskern und freien Quarkpropagatoren sind wir nun in der Lage, im Ruhesystem des gebundenen Zustands der Masse M die p_ξ^0 - und p_η^0 -Integration in der Bethe-Salpeter-Gleichung (2.2) analytisch auszuführen und mit Hilfe des Residuensatzes die p_ξ^0 - und p_η^0 -Abhängigkeit vollständig zu eliminieren. Wie im Anhang B.1 ausführlich dargestellt, reduziert sich die achtdimensionale 3-Fermionen-Bethe-Salpeter-Gleichung damit zur sechsdimensionalen 3-Fermionen-**Salpeter-Gleichung**

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) &= \left[\frac{\Lambda_1^+(\vec{p}_1) \otimes \Lambda_2^+(\vec{p}_2) \otimes \Lambda_3^+(\vec{p}_3)}{M - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + i\epsilon} + \frac{\Lambda_1^-(\vec{p}_1) \otimes \Lambda_2^-(\vec{p}_2) \otimes \Lambda_3^-(\vec{p}_3)}{M + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - i\epsilon} \right] \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \\ &\times \int \frac{d^3 p'_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\eta}{(2\pi)^3} V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \Phi(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

für die **Salpeter-Amplitude**

$$\Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \equiv \int \frac{dp_\xi^0}{2\pi} \frac{dp_\eta^0}{2\pi} \chi_{\vec{P}} \left((p_\xi^0, \vec{p}_\xi), (p_\eta^0, \vec{p}_\eta) \right) |_{\vec{P}=(M, \vec{0})} . \quad (2.9)$$

Wir haben hier sämtliche Indizes fortgelassen und die sich aus 1-Teilchen-Operatoren zusammengesetzten 3-Teilchen-Operatoren als Tensorprodukte¹ geschrieben.

In dieser Gleichung verwenden wir folgende Definitionen und Abkürzungen (siehe auch Anhang C.2):

- ω_i ist die kinetische Energie des i -ten Quarks:

$$\omega_i = \omega_i(\vec{p}_i) \equiv \sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m_i^2} .$$

- Λ_i^\pm sind Projektions-Operatoren auf die Lösungen positiver und negativer Energie der freien Dirac-Gleichung im Impulsraum und sind mit dem Dirac-Hamiltonoperator H_i definiert durch

$$\Lambda_i^\pm = \Lambda_i^\pm(\vec{p}_i) \equiv \frac{\omega_i \pm H_i(\vec{p}_i)}{2\omega_i} \quad \text{mit} \quad H_i(\vec{p}_i) \equiv \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{p}_i + m_i) = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_i + \beta m_i .$$

- Die 1-Teilchenimpulse \vec{p}_i sind im Ruhesystem wegen $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0}$ nur noch Funktionen der Relativimpulse:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_\xi + \frac{1}{2}\vec{p}_\eta , \quad \vec{p}_2 = -\vec{p}_\xi + \frac{1}{2}\vec{p}_\eta , \quad \vec{p}_3 = -\vec{p}_\eta .$$

Das Auftreten der Energieprojektoren $\Lambda_1^+ \otimes \Lambda_2^+ \otimes \Lambda_3^+$ und $\Lambda_1^- \otimes \Lambda_2^- \otimes \Lambda_3^-$ in der Salpeter-Gleichung (2.8) läßt bereits Aussagen über die Struktur der möglichen Lösungen zu, die wir später nutzen wollen, um das Problem weiter zu reduzieren. Die Projektorstruktur verringert nämlich die Zahl der unabhängigen Funktionen, die zur Beschreibung eines Baryonzustandes notwendig sind! Zunächst ist die Salpeter-Amplitude Φ wie die Bethe-Salpeter-Amplitude χ_P (im Spin-Impulsraum) eine $8 \times 8 \times 8 = 64$ -komponentige Funktion. Im \mathbb{C}^4 projizieren die Energieprojektoren $\Lambda_i^\pm(\vec{p}_i)$ wegen

$$\Lambda_i^\pm(\vec{p}_i) \Lambda_i^\pm(\vec{p}_i) = \Lambda_i^\pm(\vec{p}_i) , \quad \Lambda_i^\pm(\vec{p}_i) \Lambda_i^\mp(\vec{p}_i) = 0 \quad \text{und} \quad \Lambda_i^+(\vec{p}_i) + \Lambda_i^-(\vec{p}_i) = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^4} \quad (2.10)$$

¹ $[A \otimes B \otimes C]_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'} \equiv A_{\alpha\alpha'} B_{\beta\beta'} C_{\gamma\gamma'}$

auf jeweils zweidimensionale zueinander orthogonale Teilräume des \mathbb{C}^4 . Man kann nun entsprechend mit den acht Projektoren

$$\Lambda^{(\pm)_1(\pm)_2(\pm)_3}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \equiv \Lambda_1^{(\pm)_1}(\vec{p}_1) \otimes \Lambda_2^{(\pm)_2}(\vec{p}_2) \otimes \Lambda_3^{(\pm)_3}(\vec{p}_3) \quad (2.11)$$

den Raum $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$ in acht zueinander orthogonale 8-dimensionale Teilräume zerlegen. Mit

$$\sum_{(\pm)_1, (\pm)_2, (\pm)_3} \Lambda^{(\pm)_1(\pm)_2(\pm)_3}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = \mathbf{1}_{\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4} \quad (2.12)$$

zerfällt deshalb eine beliebige 64-komponentige Amplitude Φ in die acht Teilamplituden

$$\Phi^{(\pm)_1(\pm)_2(\pm)_3} \equiv \Lambda^{(\pm)_1(\pm)_2(\pm)_3} \Phi = \Lambda_1^{(\pm)_1} \otimes \Lambda_2^{(\pm)_2} \otimes \Lambda_3^{(\pm)_3} \Phi. \quad (2.13)$$

Für die Salpeter-Amplitude Φ als Lösung der Salpeter-Gleichung bleiben in dieser Zerlegung nur die zwei zueinander orthogonalen Teilamplituden Φ^{+++} und Φ^{---} übrig.

Multiplikation der Salpeter-Gleichung mit (2.12) und Ausnutzen von Idempotenz und Orthogonalität der Projektionoperatoren liefert für die Salpeter-Amplitude die Zerlegung:

$$\Phi = \Phi^+ + \Phi^- \quad (2.14)$$

$$\text{mit } \Phi^+ \equiv \Phi^{+++} = \Lambda_1^+ \otimes \Lambda_2^+ \otimes \Lambda_3^+ \Phi \quad \text{und} \quad \Phi^- \equiv \Phi^{---} = \Lambda_1^- \otimes \Lambda_2^- \otimes \Lambda_3^- \Phi. \quad (2.15)$$

Die Lösungsmannigfaltigkeit der Salpeter-Gleichung ist also 16-dimensional.

Da die Einteilchenprojektoren $\Lambda_i^\pm(\vec{p}_i)$ auf die Lösungen positiver bzw. negativer Energie der freien Dirac-Gleichung projizieren, hat Φ^+ die Struktur eines 3-fach tensorierten Dirac-Spinors positiver Energie und Φ^- die Struktur eines 3-fach tensorierten Dirac-Spinors negativer Energie. Die Salpeter-Gleichung behält also trotz instantaner Näherung die volle Dirac-Struktur mit positiven und negativen Energien für die drei Quarks und bleibt weiterhin formal kovariant.

Wir werden im Abschnitt 2.5 ausführlicher darauf eingehen, wie man die Dirac-Struktur der Salpeter-Amplitude Φ dazu nutzen kann, die Spinoren Φ^+ und Φ^- auf Tensorprodukte von Pauli-Spinoren zu reduzieren, um so tatsächlich die Lösung der Salpeter-Gleichung zu einem 16-dimensionalen Problem zu vereinfachen.

Für die weitere Diskussion ist es nützlich, die Salpeter-Gleichung als ein Eigenwertproblem für die Masse M eines gebundenen Zustands zu formulieren.

Unter Ausnutzung der Projektorstruktur in (2.8) und mit $H_i(\vec{p}_i) \Lambda_i^\pm(\vec{p}_i) = \pm \omega_i \Lambda_i^\pm$ bringt man die Salpeter-Gleichung (2.8) leicht auf die Form

$$(\mathcal{H}\Phi)(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = M\Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta), \quad (2.16)$$

wobei der Salpeter-Hamiltonian \mathcal{H} definiert ist durch

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}\Phi)(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) &= \sum_{i=1}^3 H_i(\vec{p}_i) \Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \\ &+ \left(\Lambda_1^+(\vec{p}_1) \otimes \Lambda_2^+(\vec{p}_2) \otimes \Lambda_3^+(\vec{p}_3) + \Lambda_1^-(\vec{p}_1) \otimes \Lambda_2^-(\vec{p}_2) \otimes \Lambda_3^-(\vec{p}_3) \right) \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \\ &\times \int \frac{d^3 p'_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\eta}{(2\pi)^3} V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \Phi(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Hierbei ist $\sum_{i=1}^3 H_i(\vec{p}_i)$ eine Kurzschreibweise für

$$\sum_{i=1}^3 H_i(\vec{p}_i) = H_1(\vec{p}_1) \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}^4} \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}^4} + \mathbf{1}_{\mathbb{C}^4} \otimes H_2(\vec{p}_2) \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}^4} + \mathbf{1}_{\mathbb{C}^4} \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}^4} \otimes H_3(\vec{p}_3) \quad (2.18)$$

2.2 Die Vertexfunktion

Durch Integration über die Relativenergien p_ξ^0 und p_η^0 hatten wir im vorangegangenen Abschnitt die Bethe-Salpeter-Amplitude χ_M im Ruhesystem des gebundenen Zustands der Masse M auf die Salpeter-Amplitude Φ reduziert. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß es umgekehrt möglich ist, mit Hilfe der Bethe-Salpeter-Gleichung aus der Salpeter-Amplitude Φ wieder die Bethe-Salpeter-Amplitude χ_M im Ruhesystem und damit, aufgrund der formalen Kovarianz der Bethe-Salpeter-Gleichung, die Amplitude $\chi_{\bar{P}}$ in einem beliebigen Bezugssystem zurückzugewinnen.

Dazu definieren wir die **Vertexfunktionen** oder **amputierten Bethe-Salpeter-Amplituden**

$$\begin{aligned}\Gamma_{\bar{P}}(p_\xi, p_\eta) &\equiv \left[S_1^F\left(\frac{1}{3}\bar{P} + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \right]^{-1} \otimes \left[S_2^F\left(\frac{1}{3}\bar{P} - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \right]^{-1} \otimes \left[S_3^F\left(\frac{1}{3}\bar{P} - p_\eta\right) \right]^{-1} \chi_{\bar{P}}(p_\xi, p_\eta) \\ \bar{\Gamma}_{\bar{P}}(p_\xi, p_\eta) &\equiv \bar{\chi}_{\bar{P}}(p_\xi, p_\eta) \left[S_1^F\left(\frac{1}{3}\bar{P} + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \right]^{-1} \otimes \left[S_2^F\left(\frac{1}{3}\bar{P} - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \right]^{-1} \otimes \left[S_3^F\left(\frac{1}{3}\bar{P} - p_\eta\right) \right]^{-1}.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Aus der Bethe-Salpeter-Gleichung (2.2) folgt dann unmittelbar der wichtige Zusammenhang zwischen der Vertexfunktion im Ruhesystem und der Salpeter-Amplitude:

$$\Gamma_{\bar{P}}(p_\xi, p_\eta) |_{\bar{P}=(M, \vec{0})} \equiv \Gamma(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \equiv -i \int \frac{d^3 p'_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\eta}{(2\pi)^3} V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \Phi(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta). \quad (2.20)$$

Insbesondere hängt im Ruhesystem die Vertexfunktion nur von den räumlichen Komponenten der Relativimpulse ab. Gleichung (2.20) erlaubt die Rekonstruktion der Vertexfunktion und damit nach Gleichung (2.19) der vollen Bethe-Salpeter-Amplitude. Mit der Salpeter-Gleichung folgt aus (2.20) die umgekehrte Beziehung

$$\Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = i \left[\frac{\Lambda_1^+ \otimes \Lambda_2^+ \otimes \Lambda_3^+}{M - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + i\epsilon} + \frac{\Lambda_1^- \otimes \Lambda_2^- \otimes \Lambda_3^-}{M + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - i\epsilon} \right] \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \Gamma(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta). \quad (2.21)$$

Aus der adjungierten Bethe-Salpeter-Gleichung bekommt man entsprechend den Zusammenhang

$$\bar{\Gamma}_{\bar{P}}(p_\xi, p_\eta) |_{\bar{P}=(M, \vec{0})} \equiv \bar{\Gamma}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \equiv -i \int \frac{d^3 p'_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\eta}{(2\pi)^3} \bar{\Phi}(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta), \quad (2.22)$$

wobei

$$\bar{\Phi}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \equiv \int \frac{dp_\xi^0}{2\pi} \frac{dp_\eta^0}{2\pi} \bar{\chi}_{\bar{P}}\left((p_\xi^0, \vec{p}_\xi), (p_\eta^0, \vec{p}_\eta)\right) |_{\bar{P}=(M, \vec{0})} \quad (2.23)$$

die **adjungierte Salpeter-Amplitude** ist.

Setzen wir in Gleichung (2.23) für $\bar{\chi}_{\bar{P}}$ den Ausdruck (2.19) ein, so kann auf der rechten Seite die Integration über die Relativenergien p_ξ^0 und p_η^0 auf die freien Propagatoren gezogen werden und man erhält (siehe Gleichung (B.7)) die zu (2.22) umgekehrte Relation

$$\bar{\Phi}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = i \bar{\Gamma}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \left[\frac{\Lambda_1^+ \otimes \Lambda_2^+ \otimes \Lambda_3^+}{M - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + i\epsilon} + \frac{\Lambda_1^- \otimes \Lambda_2^- \otimes \Lambda_3^-}{M + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - i\epsilon} \right] \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0. \quad (2.24)$$

Im nächsten Abschnitt werden wir diese Relationen zwischen Γ , χ und Φ bzw. zwischen $\bar{\Gamma}$, $\bar{\chi}$ und $\bar{\Phi}$ verwenden, um aus der Normierungsbedingung für die Bethe-Salpeter-Amplituden die entsprechende Normierungsbedingung für die Salpeter-Amplituden zu bestimmen.

2.3 Die Normierungsbedingung für die Salpeter-Amplituden

In der Normierungsbedingung (1.64) für die Bethe-Salpeter-Amplituden

$$\int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_\eta}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p''_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p''_\eta}{(2\pi)^4} \bar{\chi}_P(p'_\xi, p'_\eta) P^\mu \frac{\partial}{\partial P^\mu} \left[I(P, p'_\xi, p'_\eta, p''_\xi, p''_\eta) + iK^{(3)}(P, p'_\xi, p'_\eta, p''_\xi, p''_\eta) \right] \chi_P(p''_\xi, p''_\eta) = i 2M^2 \quad (2.25)$$

verschwindet für einen instantanen Wechselwirkungskern

$$K^{(3)}(P, p'_\xi, p'_\eta, p'_\xi, p'_\eta) = V(p_{\xi \perp P}, p_{\eta \perp P}, p_{\xi' \perp P}, p_{\eta' \perp P}), \quad (2.26)$$

der im Ruhesystem nicht von der Gesamtenergie P^0 abhängt, also

$$P^\mu \frac{\partial}{\partial P^\mu} V(p_{\xi \perp P}, p_{\eta \perp P}, p_{\xi' \perp P}, p_{\eta' \perp P}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial P^0} V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) |_{P^0=M} = 0, \quad (2.27)$$

der Anteil des Wechselwirkungskernes an der Normierung.

Da die Bethe-Salpeter-Gleichung und die Normierungsbedingung für eine instantane Wechselwirkung explizit kovariant formuliert sind, bleibt die Normierung der Amplituden χ in jedem Bezugssystem richtig. Wir können also die Normierungsbedingung für die Salpeter-Amplituden Φ im Ruhesystem bestimmen. Dann gilt mit (2.27):

$$\int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_\eta}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p''_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p''_\eta}{(2\pi)^4} \bar{\chi}_M(p'_\xi, p'_\eta) \frac{\partial}{\partial P^0} \left[I(P, p'_\xi, p'_\eta, p''_\xi, p''_\eta) \right]_{P^0=M} \chi_M(p''_\xi, p''_\eta) = i 2M. \quad (2.28)$$

Wir skizzieren an dieser Stelle kurz die Schritte, mit denen aus der Normierungsbedingung (2.28) für die Bethe-Salpeter-Amplitude die entsprechende Normierungsbedingung für die Salpeter-Amplitude folgt. Die einzelnen Schritte sind detailliert in Anhang B.3 dargestellt. Ersetzen wir in (2.28) gemäß den Definitionen (2.19) die Bethe-Salpeter-Amplituden χ_M und $\bar{\chi}_M$ durch die Vertexfunktionen Γ und $\bar{\Gamma}$, welche ja im Ruhesystem nach (2.20) und (2.22) nur noch Funktionen der räumlichen Relativimpulskomponenten $\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta$ sind, so ist die Abhängigkeit des Integranden von den Relativenergien p_ξ^0 und p_η^0 vollständig durch die freien Quarkpropagatoren bestimmt. Die p_ξ^0, p_η^0 -Integration kann deshalb, ähnlich wie bei der Herleitung der Salpeter-Gleichung, mit Hilfe des Residuensatzes analytisch ausgeführt werden. Nutzt man dann die Relationen (2.21) und (2.24) zwischen den Vertexfunktionen $\Gamma, \bar{\Gamma}$ im Ruhesystem und den Salpeter-Amplituden $\Phi, \bar{\Phi}$, sowie die im Anhang B.2 gezeigte Beziehung

$$\bar{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = -\Phi_{\alpha'\beta'\gamma'}^*(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \gamma_{\alpha'\alpha}^0 \gamma_{\beta'\beta}^0 \gamma_{\gamma'\gamma}^0 \quad (2.29)$$

zwischen Φ und $\bar{\Phi}$, so erhält man die **Normierungsbedingung für die Salpeter-Amplituden** im Ruhesystem des gebundenen Zustands:

$$\int \frac{d^3 p_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\eta}{(2\pi)^3} \Phi_{\alpha\beta\gamma}^*(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \Phi_{\alpha\beta\gamma}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = 2M. \quad (2.30)$$

Die Salpeter-Amplituden werden also mit der üblichen positiv definiten L^2 -Norm für Funktionen² $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ normiert.

² \mathcal{F} und \mathcal{C} bezeichnen hier den Einteilchen-Flavour- bzw. Colourraum.

Mit der Zerlegung (2.14) $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$ der Salpeter-Amplitude schreibt sich (2.30) aufgrund der Orthogonalität von Φ^+ und Φ^- :

$$\int \frac{d^3 p_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\eta}{(2\pi)^3} \left[\Phi_{\alpha\beta\gamma}^{+*}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \Phi_{\alpha\beta\gamma}^+(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) + \Phi_{\alpha\beta\gamma}^{-*}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \Phi_{\alpha\beta\gamma}^-(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \right] = 2M. \quad (2.31)$$

Die Normierungsbedingung (2.30) motiviert die Definition eines Skalarproduktes für zwei Amplituden Φ_1 und Φ_2 :

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle \equiv \int \frac{d^3 p_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\eta}{(2\pi)^3} \Phi_1^*{}_{\alpha\beta\gamma}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \Phi_2{}_{\alpha\beta\gamma}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta). \quad (2.32)$$

Dieses Skalarprodukt ist positiv definit, also

$$\langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0, \quad \langle \Phi | \Phi \rangle = 0 \Rightarrow \Phi = 0. \quad (2.33)$$

Bemerkenswert ist hierbei die Tatsache, daß im Gegensatz zum relativistischen Meson($q\bar{q}$)-Modell [10,11] die Salpeter-Normierungsbedingung im Baryon(qqq)-Modell (unter Vernachlässigung des irreduziblen 2-Fermion-Kernes) auf ein positiv definites Skalarprodukt führt. Probleme wie im Mesonmodell [10,11], die sich aus der nicht positiv definiten Norm der $q\bar{q}$ -Salpeter-Amplituden ergeben, treten in diesem Baryonmodell, welches nur den irreduziblen 3-Teilchen Kern berücksichtigt, also nicht auf!

Mit dem Skalarprodukt (2.32) schreibt sich dann die Normierungsbedingung (2.30) für Lösungen $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$ der Salpeter-Gleichung in der kompakten Form

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = \langle \Phi^+ | \Phi^+ \rangle + \langle \Phi^- | \Phi^- \rangle = 2M \quad (2.34)$$

Es ist physikalisch sinnvoll den instantanen 3-Fermionen-Wechselwirkungskern V so zu wählen, daß der Salpeter-Hamiltonian \mathcal{H} bzgl. des Skalarprodukts (2.32) hermitesch ist, d.h.

$$\langle \Phi_1 | \mathcal{H} \Phi_2 \rangle = \langle \mathcal{H} \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \langle \Phi_2 | \mathcal{H} \Phi_1 \rangle^*. \quad (2.35)$$

Damit sind dann die zwei folgenden wesentlichen Dinge gewährleistet:

1. Die Eigenwerte von \mathcal{H} , also die Massen M der gebundenen Zustände, sind reell³.
2. Salpeter-Amplituden, d.h. Lösungen der Salpeter-Gleichung Φ_1, Φ_2 zu verschiedenen Eigenwerten $M_1 \neq M_2$, sind zueinander orthogonal⁴, also $\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = 0$.

Die Forderung eines hermiteschen Salpeter-Hamiltonian⁵ \mathcal{H} stellt bestimmte Bedingungen an den Wechselwirkungskern $V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta)$:

Beschränken wir uns in dieser Diskussion auf Amplituden Φ mit $(\Lambda^{+++} + \Lambda^{---} - \mathbb{1}) \Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = 0$, so zeigt eine einfache Rechnung, daß aus der geforderten Hermitizität (2.35) von \mathcal{H} folgende Bedingung für den Wechselwirkungskern⁶ V folgt:

$$\gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) = V^\dagger(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta, \vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \quad (2.36)$$

Weitere Forderungen an den Wechselwirkungskern besprechen wir im nächsten Abschnitt.

³Denn: $M \langle \Phi | \Phi \rangle = \langle \Phi | \mathcal{H} \Phi \rangle = \langle \mathcal{H} \Phi | \Phi \rangle = M^* \langle \Phi | \Phi \rangle$.

⁴Denn: $M_2 \langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \langle \Phi_1 | \mathcal{H} \Phi_2 \rangle = \langle \mathcal{H} \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = M_1^* \langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = M_1 \langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle$.

⁵Bemerkung: $\sum_{i=1}^3 H_i(\vec{p}_i)$ in \mathcal{H} ist natürlich bereits hermitesch.

⁶Für 4×4 -Matrizen Γ_i gilt hierbei die Notation $[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]^\dagger \equiv \Gamma_1^\dagger \otimes \Gamma_2^\dagger \otimes \Gamma_3^\dagger$.

2.4 Symmetrien der Salpeter-Gleichung

2.4.1 Paritätsinvarianz

Aufgrund der Paritätsinvarianz in der QCD muß der Wechselwirkungskern V so beschaffen sein, daß die Salpeter-Gleichung paritätsinvariant ist. Die Darstellung der Paritätstransformation $\mathcal{P}(p^0, \vec{p}) = (p^0, -\vec{p})$ auf den Salpeter-Amplituden Φ ist gegeben durch

$$(\mathcal{P}\Phi)(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \Phi(-\vec{p}_\xi, -\vec{p}_\eta) \quad (2.37)$$

Die Paritätsinvarianz verlangt nun, daß mit $\Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta)$ ebenfalls $(\mathcal{P}\Phi)(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta)$ Lösung der Salpeter-Gleichung ist.

Wir wenden die Paritätstransformation (2.37) auf die in (2.16) definierte Amplitude $\mathcal{H}\Phi$ an, und verwenden die Relationen $\gamma^0 H_i(-\vec{p}_i) = H_i(\vec{p}_i) \gamma^0$, sowie $\gamma^0 \Lambda_i^\pm(-\vec{p}_i) = \Lambda_i^\pm(\vec{p}_i) \gamma^0$. Wenn der Wechselwirkungskern V der Bedingung

$$\gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) = V(-\vec{p}_\xi, -\vec{p}_\eta, -\vec{p}'_\xi, -\vec{p}'_\eta) \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \quad (2.38)$$

genügt, erhält man

$$\mathcal{P}(\mathcal{H}\Phi) = \mathcal{H}(\mathcal{P}\Phi), \quad (2.39)$$

und mit Φ erfüllt auch $\mathcal{P}\Phi$ die Salpeter-Gleichung.

Zusammen mit der Bedingung (2.36) an V aus der geforderten Hermitizität von \mathcal{H} folgt dann:

$$V^\dagger(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta, \vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = V(-\vec{p}_\xi, -\vec{p}_\eta, -\vec{p}'_\xi, -\vec{p}'_\eta) \quad (2.40)$$

Diese Bedingungen werden von einer großen Klasse von Kernen erfüllt. Zum Beispiel genügen Linearkombinationen von Faltungstypkernen der Form

$$V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) = V(\vec{p}_\xi - \vec{p}'_\xi, \vec{p}_\eta - \vec{p}'_\eta) = v(\vec{p}_\xi - \vec{p}'_\xi, \vec{p}_\eta - \vec{p}'_\eta) \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3, \quad (2.41)$$

mit einer skalaren, reellen und in den Argumenten geraden Funktion

$$v(\vec{q}_\xi, \vec{q}_\eta) = v(-\vec{q}_\xi, -\vec{q}_\eta) = v^*(\vec{q}_\xi, \vec{q}_\eta) \quad (2.42)$$

und komplexen 4×4 -Matrizen Γ_i mit den Eigenschaften

$$[\gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_- = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_1^\dagger \otimes \Gamma_2^\dagger \otimes \Gamma_3^\dagger = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3 \quad (2.43)$$

diesen Forderungen.

2.4.2 Zeitumkehrinvarianz

Die starke Wechselwirkung ist ebenfalls invariant unter Zeitumkehrtransformationen $\mathcal{T}(x^0, \vec{x}) = (-x^0, \vec{x})$. Unsere Salpeter-Gleichung für ein Baryon muß daher zeitumkehrinvariant sein, was zu einer weiteren Forderung an den Wechselwirkungskern V führt. Die Zeitumkehrtransformation stellt sich auf den Salpeter-Amplituden Φ dar durch

$$(\mathcal{T}\Phi)(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = -\gamma^1 \gamma^3 \otimes \gamma^1 \gamma^3 \otimes \gamma^1 \gamma^3 \Phi^*(-\vec{p}_\xi, -\vec{p}_\eta), \quad (2.44)$$

wobei hier $*$ komplexe Konjugation bedeutet. Wenden wir die Transformation (2.44) auf $\mathcal{H}\Phi$ (siehe Gleichung (2.16)) an, so folgt unter Verwendung der gültigen Relationen $\gamma^1 \gamma^3 H_i^*(-\vec{p}_i) = H_i(\vec{p}_i) \gamma^1 \gamma^3$, $\gamma^1 \gamma^3 \Lambda_i^{\pm*}(-\vec{p}_i) = \Lambda_i^\pm(\vec{p}_i) \gamma^1 \gamma^3$ und $\gamma^1 \gamma^3 \gamma^{0*} = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3$, daß

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}\Phi) = \mathcal{H}(\mathcal{T}\Phi), \quad (2.45)$$

wenn man für den Wechselwirkungskern fordert:

$$\gamma^1 \gamma^3 V^*(-\vec{p}_\xi, -\vec{p}_\eta, -\vec{p}'_\xi, -\vec{p}'_\eta) = V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \gamma^1 \gamma^3. \quad (2.46)$$

Dann erfüllt mit Φ auch $\mathcal{T} \Phi$ die Salpeter-Gleichung; sie ist damit zeitumkehrinvariant. Speziell für Faltungstypkerne der Art (2.41) führt die Bedingung (2.46) zu der Forderung

$$\gamma^1 \gamma^3 \otimes \gamma^1 \gamma^3 \otimes \gamma^1 \gamma^3 \Gamma_1^* \otimes \Gamma_2^* \otimes \Gamma_3^* = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3 \gamma^1 \gamma^3 \otimes \gamma^1 \gamma^3 \otimes \gamma^1 \gamma^3 \quad (2.47)$$

an die Spinstruktur $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3$.

2.4.3 Symmetrie bezüglich positiver und negativer Eigenwerte

Durch die Forderung der Hermitizität von \mathcal{H} können wir gewährleisten, daß die Eigenwerte M der Salpeter-Gleichung (2.16) reell sind. Diese Bedingung wird durch eine bestimmte Forderungen an den Wechselwirkungskern V erfüllt. Nun ist es nicht möglich, durch eine weitere entsprechende Forderung zu gewährleisten, daß die Eigenwerte auch positiv sind: $M > 0$, denn bereits die Dirac-Hamiltonoperatoren $\sum_{i=1}^3 H_i(\vec{p}_i)$ in \mathcal{H} sind schon nicht positiv definit. Aufgrund des Projektors Λ^{---} in \mathcal{H} in muß das Spektrum von \mathcal{H} nicht einmal nach unten beschränkt sein! \mathcal{H} ist also nicht positiv definit bzgl. des Skalarprodukts (2.32), so daß das Eigenspektrum von \mathcal{H} im allgemeinen auch negative Eigenwerte $-M$ besitzt.

Wir können aber durch eine weitere Forderung an den Kern V gewährleisten, daß diese negativen Eigenwerte $-M$ eine physikalische Bedeutung erhalten, die mit einer zusätzlichen Symmetrie der Salpeter-Gleichung erklärt werden kann.

Wir fordern für den 3-Fermionen-Wechselwirkungskern V die Gültigkeit der Gleichung

$$\left[\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5, V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \right]_- = 0. \quad (2.48)$$

Dann gilt:

Ist Φ Lösung der Salpeter-Gleichung mit negativem Eigenwert $-M$, d.h.

$$(\mathcal{H}\Phi)(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = -M\Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta),$$

so ist

$$\tilde{\Phi} \equiv \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \Phi \quad (2.49)$$

Lösung der Salpeter-Gleichung mit dem entsprechend positiven Eigenwert $+M$, also

$$(\mathcal{H}\tilde{\Phi})(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = M\tilde{\Phi}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta).$$

Zum Beweis dieser Symmetrie wenden wir $\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5$ auf

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}\Phi)(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) &= \sum_{i=1}^3 H_i(\vec{p}_i) \Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) + (\Lambda^{+++} + \Lambda^{---}) \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \\ &\quad \times \int \frac{d^3 p'_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\eta}{(2\pi)^3} V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \Phi(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \end{aligned}$$

an.

Benutzen wir die Relationen

$$\left[\gamma^0 \gamma^5, \gamma^0 \right]_+ = 0, \quad \left[\gamma^0 \gamma^5, H_i(\vec{p}_i) \right]_+ = 0, \quad \gamma^0 \gamma^5 \Lambda_i^\pm(\vec{p}_i) = \Lambda_i^\mp(\vec{p}_i) \gamma^0 \gamma^5 \quad (2.50)$$

bzw. die daraus folgenden

$$\left[\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \quad , \quad \sum_{i=1}^3 H_i(\vec{p}_i) \right]_+ = 0 \quad , \quad (2.51)$$

$$\left[\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \quad , \quad \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \right]_+ = 0 \quad , \quad (2.52)$$

$$\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \Lambda^{\pm\pm\pm} = \Lambda^{\mp\mp\mp} \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \quad , \quad (2.53)$$

so ist leicht einzusehen, daß mit der Forderung (2.48) an den Wechselwirkungskern die Identität

$$\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 (\mathcal{H}\Phi)(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = - \left(\mathcal{H} (\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \Phi) \right) (\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \quad (2.54)$$

gilt, und damit die Behauptung folgt.

Wir wollen kurz diskutieren, was die Transformation $\Phi \rightarrow \tilde{\Phi} = \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \Phi$ bewirkt:

- Aufgrund der Antikommutatorrelation (2.52) folgt für die Darstellung (2.37) der Paritätstransformation:

$$\left[\mathcal{P} \quad , \quad \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \right]_+ = 0 \quad . \quad (2.55)$$

Somit ändert die Transformation $\Phi \rightarrow \tilde{\Phi} = \bigotimes_i \gamma^0 \gamma^5 \Phi$ die Parität der Salpeter-Amplitude. $\tilde{\Phi}$ besitzt also die umgekehrte Parität zu Φ .

- Wegen (2.53) vertauscht $\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5$ die Rollen der Komponenten positiver und negativer Energie:

$$\Phi^+ \rightarrow \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \Phi^+ = \tilde{\Phi}^- \quad , \quad \Phi^- \rightarrow \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \Phi^- = \tilde{\Phi}^+ \quad . \quad (2.56)$$

Wir fassen zusammen:

Existiert im Spektrum eine negative Masse $-M$ zur Salpeter-Amplitude Φ_{-M}^π mit definierter Parität π , d.h.

$$\mathcal{H}\Phi_{-M}^\pi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = -M \Phi_{-M}^\pi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \quad \text{und} \quad \mathcal{P}\Phi_{-M}^\pi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = \pi \Phi_{-M}^\pi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \quad , \quad (2.57)$$

so existiert eine Lösung der Salpeter-Gleichung, nämlich $\Phi_M^{-\pi} \equiv \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \Phi_{-M}^\pi$, welche als Eigenwert die physikalisch sinnvolle positive Masse $+M$ besitzt und die entsprechend andere Parität $-\pi$ hat, d.h.

$$\mathcal{H}\Phi_M^{-\pi}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = M \Phi_M^{-\pi}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \quad \text{und} \quad \mathcal{P}\Phi_M^{-\pi}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = -\pi \Phi_M^{-\pi}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \quad , \quad (2.58)$$

und es gilt

$$\Phi_M^{-\pi+} = \bigotimes_{i=1}^3 \gamma^0 \gamma^5 \Phi_{-M}^{\pi-} \quad \text{und} \quad \Phi_M^{-\pi-} = \bigotimes_{i=1}^3 \gamma^0 \gamma^5 \Phi_{-M}^{\pi+} \quad . \quad (2.59)$$

Erfüllt also der irreduzible instantane 3-Fermionen-Wechselwirkungskern V die Forderung (2.48), dann haben die negativen Massen $-M$ im Spektrum eines Baryons mit Parität π eine wohl-definierte physikalische Bedeutung: Ihre Beträge M stellen das Spektrum des entsprechenden Baryons mit der entgegengesetzten Parität $-\pi$ dar.

Diese Symmetrie stellt in numerischer Hinsicht auch eine Vereinfachung dar, da man bei der Bestimmung des Massenspektrums eines Baryons gleichzeitig, in Form der negativen Eigenwerte, das Spektrum des Baryons mit der anderen Parität erhält.

2.4.4 Das Skalierungsverhalten der Salpeter-Gleichung

In diesem Abschnitt zeigen wir für eine bestimmte Klasse von Potentialen, wie man eine Beziehung zwischen den Parametern des Modells und den Masseneigenwerten M finden kann, ohne die Salpeter-Gleichung explizit zu lösen; wir nutzen dafür das Verhalten der Salpeter-Amplitude und der Operatoren unter Umskalierung der Koordinaten aus. Dazu definieren wir für $\alpha > 0$ den unitären Dilatationsoperator D_α :

$$D_\alpha \Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \equiv \frac{1}{\alpha^3} \Phi\left(\frac{\vec{p}_\xi}{\alpha}, \frac{\vec{p}_\eta}{\alpha}\right), \quad D_\alpha \mathcal{O}(\vec{p}) D_\alpha^{-1} = \mathcal{O}\left(\frac{\vec{p}}{\alpha}\right), \quad D_\alpha \mathcal{O}(\vec{x}) D_\alpha^{-1} = \mathcal{O}(\alpha \vec{x}). \quad (2.60)$$

Das Skalierungsverhalten des Dirac-Hamiltonoperators $H_i(\vec{p}_i) = H_i(\vec{p}_i; m_i)$, sowie der Projektionsoperatoren $\Lambda_i^\pm(\vec{p}_i) = \Lambda_i^\pm(\vec{p}_i; m_i)$ ist dann durch eine Umskalierung der Konstituentenmassen darstellbar:

$$D_\alpha H_i(\vec{p}_i; m_i) D_\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} H_i(\vec{p}_i; \alpha m_i), \quad D_\alpha \Lambda_i^\pm(\vec{p}_i; m_i) D_\alpha^{-1} = \Lambda_i^\pm(\vec{p}_i; \alpha m_i). \quad (2.61)$$

Wir betrachten nun den Spezialfall lokaler 3-Teilchen-Potentiale $V(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\xi}', \vec{\eta}')$ mit einer beliebigen Spin-Struktur $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3$, die durch 2-Teilchen-Potentiale der Form $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^n$ parametrisiert sein sollen, also:

$$\begin{aligned} V(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\xi}', \vec{\eta}'; a_n) &= v(\vec{\xi}, \vec{\eta}; a_n) \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}') \delta^{(3)}(\vec{\eta} - \vec{\eta}') \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3 \\ \text{mit } v(\vec{\xi}, \vec{\eta}; a_n) &= \sum_n a_n \left(\sum_{i < j} |\vec{x}_i - \vec{x}_j|^n \right). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Solche lokalen Potentiale entsprechen im Impulsraum einem Faltungstypkern:

$$\begin{aligned} V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}_\xi', \vec{p}_\eta'; a_n) &= V(\vec{p}_\xi - \vec{p}_\xi', \vec{p}_\eta - \vec{p}_\eta'; a_n) \\ &= \int d^3\xi d^3\eta e^{-i(\vec{p}_\xi - \vec{p}_\xi') \cdot \vec{\xi}} e^{-i(\vec{p}_\eta - \vec{p}_\eta') \cdot \vec{\eta}} v(\vec{\xi}, \vec{\eta}; a_n) \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Für diese Art von Potentialen ist das Skalierungsverhalten durch eine Umskalierung der Potentialparameter $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ beschreibbar:

$$\begin{aligned} D_\alpha v(\vec{\xi}, \vec{\eta}; a_n) D_\alpha^{-1} &= v(\alpha \vec{\xi}, \alpha \vec{\eta}; a_n) = v(\vec{\xi}, \vec{\eta}; \alpha^n a_n) = \frac{1}{\alpha} v(\vec{\xi}, \vec{\eta}; \alpha^{n+1} a_n) \\ D_\alpha V(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\xi}', \vec{\eta}'; a_n) D_\alpha^{-1} &= V(\alpha \vec{\xi}, \alpha \vec{\eta}, \alpha \vec{\xi}', \alpha \vec{\eta}'; a_n) = \alpha^{-7} V(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\xi}', \vec{\eta}'; \alpha^{n+1} a_n) \\ D_\alpha V(\vec{p}_\xi - \vec{p}_\xi', \vec{p}_\eta - \vec{p}_\eta'; a_n) D_\alpha^{-1} &= V\left(\frac{\vec{p}_\xi - \vec{p}_\xi'}{\alpha}, \frac{\vec{p}_\eta - \vec{p}_\eta'}{\alpha}; a_n\right) = \alpha^5 V(\vec{p}_\xi - \vec{p}_\xi', \vec{p}_\eta - \vec{p}_\eta'; \alpha^{n+1} a_n) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Damit folgt für die Integraloperation

$$\left(\hat{V}(a_n) \Phi \right) (\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \equiv \int \frac{d^3 p'_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\eta}{(2\pi)^3} V(\vec{p}_\xi - \vec{p}'_\xi, \vec{p}_\eta - \vec{p}'_\eta; a_n) \Phi(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \quad (2.65)$$

das Skalierungsverhalten

$$\left(D_\alpha \left(\hat{V}(a_n) \Phi \right) \right) (\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = \frac{1}{\alpha} \left(\hat{V}(\alpha^{n+1} a_n) (D_\alpha \Phi) \right) (\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta). \quad (2.66)$$

Mit den Skalierungsregeln (2.61) und (2.66) erhalten wir dann schließlich das Skalierungsverhalten des von den Parametern m_1, m_2, m_3 und a_n abhängigen Salpeter-Hamiltonians \mathcal{H} :

$$(D_\alpha (\mathcal{H}(m_1, m_2, m_3; a_n) \Phi)) (\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = \frac{1}{\alpha} \left(\mathcal{H}(\alpha m_1, \alpha m_2, \alpha m_3; \alpha^{n+1} a_n) (D_\alpha \Phi) \right) (\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta). \quad (2.67)$$

Durch eine Umskalierung der Modellparameter gemäß

$$m_1, m_2, m_3 \rightarrow \alpha m_1, \alpha m_2, \alpha m_3, \quad a_n \rightarrow \alpha^{n+1} a_n \quad (2.68)$$

erreicht man somit eine lineare Streckung bzw. Stauchung des Massenspektrums M von \mathcal{H} mit dem Skalierungsparameter α

$$M \rightarrow \alpha M, \quad (2.69)$$

wobei die Eigenzustände von $\mathcal{H}(m_1, m_2, m_3; a_n)$ durch Umskalierung der Koordinaten $\Phi \rightarrow D_\alpha \Phi$ in die Eigenzustände von $\mathcal{H}(\alpha m_1, \alpha m_2, \alpha m_3; \alpha^{n+1} a_n)$ übergehen.

2.4.5 Permutationssymmetrie

Bisher haben wir bei der Herleitung der Bethe-Salpeter-Gleichung aus der Integralgleichung für die Greensfunktion und bei der Formulierung der Salpeter-Gleichung im Fall eines instantanen Wechselwirkungskerns stillschweigend so getan, als wären die drei Quarks unterscheidbar; insbesondere hatten wir jedem Teilchen i die Masse m_i zugeordnet. Das in dieser Arbeit beschriebene Modell soll Baryonen mit den drei Flavourfreiheitsgraden up (u), down (d) und strange (s) beschreiben. Nehmen wir zunächst exakte Flavour-SU(3)-Symmetrie an, d.h. Gleichheit der Massen $m_u = m_d = m_s$. Dann sind die drei Quarks im Sinne des verallgemeinerten Pauli-Prinzip ununterscheidbar.

Die Ununterscheidbarkeit der drei Quarks, welche ja Fermionen sind, verlangt nun eine Bethe-Salpeter-Amplitude $\chi_{P \alpha \beta \gamma}(x_1, x_2, x_3)$, die total antisymmetrisch unter Vertauschung sämtlicher Indizes (Colour-, Flavour-, Spinindizes) und Koordinaten zweier Teilchen ist. Entsprechend muß auch die Bethe-Salpeter-Gleichung selbst, also insbesondere der Wechselwirkungskern symmetrisch unter Teilchen-Permutationen sein.

Die antisymmetrische Bethe-Salpeter-Amplitude kann in eine Linearkombination von total antisymmetrischen Produktzuständen mit Orts- (\mathcal{O}), Spin- (Σ), Flavour- (\mathcal{F}) und Farbanteilen (\mathcal{C}) zerlegt werden:

$$\chi_{P \begin{smallmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{smallmatrix} f_1 f_2 f_3}(x_1, x_2, x_3) = \left(\sum_n \mathcal{O}^n(X, \xi, \eta) \Sigma_{s_1 s_2 s_3}^n \mathcal{F}_{f_1 f_2 f_3}^n \right) \mathcal{C}^{c_1 c_2 c_3} \quad (2.70)$$

mit den Spinorindizes $s_i = 0, 1, 2, 3$, den Flavourindizes $f_i = u, d, s$ und den Colourindizes $c_i = r, g, b$. Baryonen sind wie alle Hadronen farbneutrale Zustände in der QCD, weshalb der Colouranteil durch das total antisymmetrische Farbsingulett

$$\mathcal{C}^{c_1 c_2 c_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon^{c_1 c_2 c_3} \quad (2.71)$$

gegeben ist und somit von dem Orts-, Spin-, Flavouranteil separiert werden kann. Der Orts-, Spin-, Flavouranteil $\mathcal{O} \otimes \Sigma \otimes \mathcal{F}$ muß dementsprechend total symmetrisch sein.

Dasselbe trifft natürlich auch für die Salpeter-Amplitude $\Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta)$ und die Salpeter-Gleichung zu.

Nun ist aber im Gegensatz zur Colour-Symmetrie die Flavour-Symmetrie nicht exakt, da die Quarks unterschiedliche Massen besitzen. Die SU(3)-Flavour-Symmetrie ist gebrochen. Da in diesem Modell nur die starke Wechselwirkung in Betracht gezogen wird, können wir aber in guter Näherung die Flavour-SU(2), also die Isospin-Symmetrie für das u- und d-Quark als exakt annehmen:

$$m_u = m_d < m_s. \quad (2.72)$$

Diese explizite Brechung der SU(3)-Symmetrie durch die schwere s-Quarkmasse soll nun ausgehend von der im Fall gleicher Massen permutationssymmetrischen Salpeter-Gleichung eingebaut

werden, und zwar so, daß auch bei ungleichen Massen gemäß (2.72) die Salpeter-Gleichung permutationssymmetrisch bleibt. Dieses geschieht mit Hilfe der auf dem Einteilchen-Flavourraum

$$\mathcal{F} \equiv \text{Span} \left\{ |u\rangle_{\mathcal{F}} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}, |d\rangle_{\mathcal{F}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}, |s\rangle_{\mathcal{F}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}} \right\} \cong \mathbb{C}^3 \quad (2.73)$$

wirkenden Projektoren

$$P_n \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}} = \frac{2}{3} \mathbf{1}_{\mathcal{F}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \quad \text{und} \quad P_s \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}} = \frac{1}{3} \mathbf{1}_{\mathcal{F}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8. \quad (2.74)$$

Hierbei ist

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}$$

die achte Gell-Mann-Matrix. P_s projiziert auf den strange-Zustand $|s\rangle$ und P_n auf die 'nonstrange'-Flavourzustände, die wir zu einem Isospin-Dublett $|n\rangle$ mit Isospin $t = \frac{1}{2}$ und Isospin-3-Komponenten $m_t = \pm \frac{1}{2}$ zusammenfassen:

$$|n, m_t = +\frac{1}{2}\rangle_{\mathcal{F}} \equiv |u\rangle_{\mathcal{F}} \quad |n, m_t = -\frac{1}{2}\rangle_{\mathcal{F}} \equiv |d\rangle_{\mathcal{F}}. \quad (2.75)$$

Im Salpeter-Hamiltonian \mathcal{H} werden die massenabhängigen Operatoren $H_i(\vec{p}_i)$ und $\Lambda_i^{\pm}(\vec{p}_i)$ ersetzt durch

$$H_i(\vec{p}_i) \rightarrow H(\vec{p}_i) \equiv \sum_{f=n,s} H(\vec{p}_i; m_f) \otimes P_f \quad \text{und} \quad \Lambda_i^{\pm}(\vec{p}_i) \rightarrow \Lambda^{\pm}(\vec{p}_i) \equiv \sum_{f=n,s} \Lambda^{\pm}(\vec{p}_i; m_f) \otimes P_f, \quad (2.76)$$

wobei nun m_f die Masse eines Konstituentenquarks mit Flavour f ist, und wie gehabt

$$H(\vec{p}; m) \equiv \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m), \quad \Lambda^{\pm}(\vec{p}; m) \equiv \frac{\omega(\vec{p}; m) \pm H(\vec{p}; m)}{2\omega(\vec{p}; m)}, \quad \omega(\vec{p}; m) \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}. \quad (2.77)$$

Entsprechend dem Flavour $f_i = n$ oder s im Flavouranteil \mathcal{F} der total antisymmetrischen Salpeter-Amplitude Φ werden dadurch die massenabhängigen Operatoren mit der 'richtigen' Masse m_{f_i} versehen. Auf diese Weise sind die Operatoren

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 H(\vec{p}_i) = \sum_{\substack{f_1, f_2, f_3 = \\ n, s}} \left\{ \right. & [H(\vec{p}_1; m_{f_1}) \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \otimes [P_{f_1} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}}] \\ & + [\mathbf{1} \otimes H(\vec{p}_2; m_{f_2}) \otimes \mathbf{1}] \otimes [\mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes P_{f_2} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}}] \\ & \left. + [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes H(\vec{p}_3; m_{f_3})] \otimes [\mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes P_{f_3}] \right\} \end{aligned} \quad (2.78)$$

und

$$\begin{aligned} \Lambda^{\pm\pm\pm}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) & \equiv \Lambda^{\pm}(\vec{p}_1) \otimes \Lambda^{\pm}(\vec{p}_2) \otimes \Lambda^{\pm}(\vec{p}_3) \\ & = \sum_{\substack{f_1, f_2, f_3 = \\ n, s}} [\Lambda^{\pm}(\vec{p}_1; m_{f_1}) \otimes \Lambda^{\pm}(\vec{p}_2; m_{f_2}) \otimes \Lambda^{\pm}(\vec{p}_3; m_{f_3})] \otimes [P_{f_1} \otimes P_{f_2} \otimes P_{f_3}] \end{aligned} \quad (2.79)$$

im Salpeter-Hamiltonian \mathcal{H} invariant unter beliebigen Permutationen Π der Permutationsgruppe S_3 , die gleichzeitig die Koordinaten sowie Spin-, Flavour- und Colourindizes vertauschen:

$$[\Pi, \Lambda^{\pm\pm\pm}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta)]_- = 0, \quad \left[\Pi, \sum_{i=1}^2 H(\vec{p}_i) \right]_- = 0 \quad \forall \Pi \in S_3. \quad (2.80)$$

Mit einem permutationssymmetrischen instantanen Wechselwirkungskern V ist dann \mathcal{H} insgesamt und damit die Salpeter-Gleichung auch im Fall ungleicher Massen permutationssymmetrisch:

$$[\Pi, V]_- = 0 \quad \forall \Pi \in S_3 \Rightarrow [\Pi, \mathcal{H}]_- = 0 \quad \forall \Pi \in S_3. \quad (2.81)$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit soll zur numerischen Lösung der Salpeter-Gleichung die Salpeter-Amplitude nach einer Basis entwickelt werden und die Salpeter-Gleichung in Form einer Matrix-Gleichung formuliert werden. Diese Baryon-Basiszustände müssen nach Abseparation des schiefsymmetrischen Colouranteils symmetrische Produktzustände $\mathcal{O} \otimes \Sigma \otimes \mathcal{F}$ im Impuls-, Spin-, Flavourraum sein, die mit Hilfe der irreduziblen Darstellungen der Gruppe S_3 auf diesen Räumen konstruiert werden. Im Hinblick auf die Konstruktion von Impulsraumfunktionen mit definierter Permutationssymmetrie wollen wir bereits an dieser Stelle geeignetere Jacobi-Koordinaten ρ, λ und p_ρ, p_λ einführen, die aus den bisherigen Relativkoordinaten ξ, η bzw. p_ξ, p_η durch eine Umskalierung hervorgehen:

$$\rho \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \quad \lambda \equiv \sqrt{\frac{2}{3}}\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + x_2 - 2x_3) \quad (2.82)$$

$$p_\rho \equiv \sqrt{2}p_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2) \quad p_\lambda \equiv \sqrt{\frac{3}{2}}p_\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(p_1 + p_2 - 2p_3) \quad (2.83)$$

Diese umskalierten Jacobi-Koordinaten ρ, λ und p_ρ, p_λ gehören nämlich zur gemischt symmetrischen irreduziblen Standarddarstellung der Permutationsgruppe⁷ S_3 :

$$(12) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} \quad (123) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

Mit einer Umnormierung der Amplituden Φ und des instantanen Wechselwirkungskernes V im Impulsraum⁸ gemäß

$$\Phi_{neu}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \equiv \sqrt{\left| \frac{\partial(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)}{\partial(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta)} \right|} \Phi_{alt}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = 3^{-\frac{3}{4}} \Phi_{alt}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_\rho, \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_\lambda\right) \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} V_{neu}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda, \vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) &\equiv \sqrt{\left| \frac{\partial(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)}{\partial(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta)} \right|} \sqrt{\left| \frac{\partial(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda)}{\partial(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta)} \right|} V_{alt}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{27}} V_{alt}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_\rho, \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}'_\rho, \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}'_\lambda\right) \end{aligned} \quad (2.86)$$

⁷Die Operatoren (12) und (123) generieren S_3 .

⁸Entsprechend lautet die Umskalierung im Ortsraum:

$$\begin{aligned} \Phi_{neu}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) &\equiv \sqrt{\left| \frac{\partial(\vec{\xi}, \vec{\eta})}{\partial(\vec{\rho}, \vec{\lambda})} \right|} \Phi_{alt}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = 3^{\frac{3}{4}} \Phi_{alt}(\sqrt{2}\vec{\rho}, \sqrt{\frac{3}{2}}\vec{\lambda}) \\ V_{neu}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\rho}', \vec{\lambda}') &\equiv \sqrt{\left| \frac{\partial(\vec{\xi}, \vec{\eta})}{\partial(\vec{\rho}, \vec{\lambda})} \right|} \sqrt{\left| \frac{\partial(\vec{\xi}', \vec{\eta}')}{\partial(\vec{\rho}', \vec{\lambda}')} \right|} V_{alt}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\xi}', \vec{\eta}') = \sqrt{27} V_{alt}(\sqrt{2}\vec{\rho}, \sqrt{\frac{3}{2}}\vec{\lambda}, \sqrt{2}\vec{\rho}', \sqrt{\frac{3}{2}}\vec{\lambda}') \end{aligned}$$

behalten sämtliche Gleichungen in den neuen Jacobi-Relativkoordinaten ihre Form⁹:

- Das Skalarprodukt für zwei Amplituden Φ_1 und Φ_2 :

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \int \frac{d^3 p_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\lambda}{(2\pi)^3} \Phi_1^*_{\alpha\beta\gamma}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \Phi_2_{\alpha\beta\gamma}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) . \quad (2.87)$$

- Die Normierungsbedingung für die Salpeter-Amplituden:

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = \int \frac{d^3 p_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\lambda}{(2\pi)^3} \Phi^*_{\alpha\beta\gamma}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \Phi_{\alpha\beta\gamma}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = 2M . \quad (2.88)$$

- Die Salpeter-Gleichung:

$$(\mathcal{H}\Phi)(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = M\Phi(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) , \quad (2.89)$$

wobei nun \mathcal{H} in den neuen Jacobi-Koordinaten $\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda$ und den permutationssymmetrischen, Flavour-SU(3)-brechenden Operatoren (2.78) und (2.79) definiert ist durch

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}\Phi)(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &= \sum_{i=1}^3 H(\vec{p}_i) \Phi(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \\ &+ [\Lambda^{+++}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) + \Lambda^{---}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)] \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \\ &\times \int \frac{d^3 p'_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\lambda}{(2\pi)^3} V(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda, \vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) \Phi(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Diese Eigenwertgleichung soll der Ausgangspunkt zur numerischen Lösung der Salpeter-Gleichung im Kapitel 3 sein.

2.5 Reduktion der Salpeter-Amplituden auf Pauli-Spinoren

Wir kommen noch einmal auf die Projektorstruktur der Salpeter-Gleichung in instantaner Näherung zurück. Wir haben im Abschnitt (2.1.2) gesehen, daß durch die jeweilige Anwendung der Energieprojektoren $\Lambda^{+++} \equiv \Lambda^+ \otimes \Lambda^+ \otimes \Lambda^+$ und $\Lambda^{---} \equiv \Lambda^- \otimes \Lambda^- \otimes \Lambda^-$ die Salpeter-Amplitude Φ in zwei orthogonale Anteile Φ^+ und Φ^- zerlegt werden kann, die wegen der Idempotenz Eigenzustände dieser Energieprojektoren sind, also:

$$\Phi = \Phi^+ + \Phi^- \quad \text{mit} \quad \Phi^+ \equiv \Lambda^{+++} \Phi \quad \text{und} \quad \Phi^- \equiv \Lambda^{---} \Phi. \quad (2.91)$$

Wir betrachten zunächst die Struktur eines Dirac-Spinors und zeigen, wie ein solcher durch eine Einbettungsoperation aus einem 2er-Spinor (Pauli-Spinor) erzeugt werden kann. Dieses Schema können wir dann in kanonischer Weise auf die Salpeter-Amplitude erweitern, um diese schließlich durch eine analoge Einbettungsoperation durch dreifach tensorierte Pauli-Spinoren zu generieren.

⁹Im Folgenden sei immer $\Phi = \Phi_{neu}$ die Salpeter-Amplitude in den neuen Relativkoordinaten.

2.5.1 Die Struktur eines Dirac-Spinors

Wie im Anhang C.2 dargestellt, projizieren die Einteilchen-Energieprojektoren $\Lambda^\pm(\vec{p}; m)$ auf Dirac-Spinoren positiver bzw. negativer Energie¹⁰ $\psi_m^\pm : \mathbf{R}_m^\pm \rightarrow \mathbb{C}^4$, d.h auf Lösungen der freien Dirac-Gleichung (im Impulsraum):

$$\begin{aligned} (\gamma(p) - m) \psi_m^+(p) &= (p^\mu \gamma_\mu - m) \psi_m^+(p) = 0 & \Leftrightarrow & \Lambda^+(\vec{p}; m) \psi_m^+(p) = \psi_m^+(p) \\ (\gamma(\tilde{p}) - m) \psi_m^-(\tilde{p}) &= (\tilde{p}^\mu \gamma_\mu - m) \psi_m^-(\tilde{p}) = 0 & \Leftrightarrow & \Lambda^-(\vec{p}; m) \psi_m^-(\tilde{p}) = \psi_m^-(\tilde{p}) , \end{aligned} \quad (2.92)$$

wobei $p = (p^0, \vec{p})$ und $\tilde{p} \equiv -\mathcal{P}p = (-p^0, \vec{p})$ mit $0 \leq p^0 = \omega(\vec{p}) \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$.

Nun ist ein 4-komponentiger-Dirac-Spinor positiver/negativer Energie $\psi_m^\pm : \mathbf{R}_m^\pm \rightarrow \mathbb{C}^4$ für ein Teilchen der Masse m durch eine 2-komponentige Funktion (Pauli-Spinor) $\varphi^\pm : \mathbf{R}_m^\pm \rightarrow \mathbb{C}^2$ eindeutig festgelegt, so daß man in der Weyl-Darstellung (siehe Anhang C.2) mit den Abbildungen $\tilde{T}^\pm : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(\mathbb{C}, 4 \times 2) = \{\text{Menge der komplexen } 4 \times 2\text{-Matrizen}\}$

$$\tilde{T}^\pm(\vec{p}) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$$

$$\tilde{T}^+(\vec{p}; m) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{p}; m)}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma(\vec{p})} \\ \sqrt{\sigma(\vec{p})} \end{pmatrix}_{|p=(\omega(\vec{p}; m), \vec{p})} \quad (2.93)$$

$$\tilde{T}^-(\vec{p}; m) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{p}; m)}} \begin{pmatrix} -\sqrt{\sigma(\vec{p})} \\ \sqrt{\sigma(\vec{p})} \end{pmatrix}_{|p=(\omega(\vec{p}; m), \vec{p})} \quad (2.94)$$

die 4-komponentigen Eigenzustände der Energieprojektoren Λ^\pm als 'Einbettung' von Pauli-Spinoren erzeugen kann:

$$\psi_m^+(p) = \tilde{T}^+(\vec{p}; m) \varphi^+(p) \quad \text{und} \quad \psi_m^-(\tilde{p}) = \tilde{T}^-(\vec{p}; m) \varphi^-(\tilde{p}) . \quad (2.95)$$

2.5.2 Die Salpeter-Amplitude als Einbettung von Pauli-Spinoren

Nach Gleichung (2.91) setzt sich die Salpeter-Amplitude Φ aus Anteilen Φ^\pm additiv zusammen, welche Eigenzustände der in (2.79) gegebenen 3-Teilchen-Energieprojektoren Λ^{+++} und Λ^{---} sind:

$$\Lambda^{\pm\pm\pm}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \sum_{\substack{f_1, f_2, f_3 = \\ n, s}} [\Lambda^\pm(\vec{p}_1; m_{f_1}) \otimes \Lambda^\pm(\vec{p}_2; m_{f_2}) \otimes \Lambda^\pm(\vec{p}_3; m_{f_3})] \otimes [P_{f_1} \otimes P_{f_2} \otimes P_{f_3}] . \quad (2.96)$$

Diese Anteile Φ^\pm sind also 3-fach tensorierte 4er-Spinoren ausschließlich positiver bzw. negativer Energie. Wir wollen im Folgenden diesen Sachverhalt dazu ausnutzen, die im Spin-Impulsraum $4 \times 4 \times 4 = 64$ -komponentigen Spinoren Φ^\pm positiver und negativer Energie unter Anwendung obiger Einbettungsoperatoren auf 3-fach tensorierte Pauli-Spinoren ξ^\pm zu reduzieren. Diese (im Spin-Impulsraum) nur noch $2 \times 2 \times 2 = 8$ -komponentigen Funktionen ξ^\pm sind natürlich numerisch wesentlich leichter zu handhaben.

Zunächst definieren wir die folgenden auf dem Impuls-, Spin-, Flavourraum wirkenden Einteilchen-Einbettungs-Operatoren $T^\pm(\vec{p}) : \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}^4 \otimes \mathcal{F}$:

$$T^+(\vec{p}) \equiv \sum_{f=n, s} \tilde{T}^+(\vec{p}; m_f) \otimes P_f , \quad T^-(\vec{p}) \equiv \sum_{f=n, s} \tilde{T}^-(\vec{p}; m_f) \otimes P_f . \quad (2.97)$$

¹⁰ $\mathbf{R}_m^\pm \equiv \{p \in \mathbf{R}^4; \langle p, p \rangle = m^2, p = (\pm\omega(\vec{p}), \vec{p})\}$ ist die positive bzw. negative Massenschale.

Diese Einteilchen-Einbettungsoperatoren machen aus Pauli-Spinoren $\varphi^\pm(\cdot) \otimes |f\rangle_{\mathcal{F}} : \mathbf{R}_m^\pm \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}$ Eigenzustände der Operatoren

$$\Lambda^\pm(\vec{p}_i) = \sum_{f=n,s} \Lambda^\pm(\vec{p}_i; m_f) \otimes P_f, \quad (2.98)$$

denn es gilt mit den Gleichungen (C.25):

$$\Lambda^+(\vec{p}) \mathbb{T}^+(\vec{p}; m) = \mathbb{T}^+(\vec{p}; m), \quad \Lambda^-(\vec{p}) \mathbb{T}^-(\vec{p}; m) = \mathbb{T}^-(\vec{p}; m), \quad \Lambda^\pm(\vec{p}) \mathbb{T}^\mp(\vec{p}; m) = 0 \quad (2.99)$$

Wegen (siehe Gleichungen (C.26))

$$[\mathbb{T}^+(\vec{p})]^\dagger \mathbb{T}^+(\vec{p}) = [\mathbb{T}^-(\vec{p})]^\dagger \mathbb{T}^-(\vec{p}) = \mathbf{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \quad (2.100)$$

ist die Einbettungsoperation eindeutig!

Um nun die Anteile Φ^\pm der Salpeter-Amplitude entsprechend der obigen Diskussion als Einbettung von 3-fach tensorierten Pauli-Spinoren ξ^\pm zu schreiben, bilden wir in kanonischer Weise durch Tensorierung von (2.97) die 3-Teilchen-Einbettungsoperatoren

$$\begin{aligned} T^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} &\rightarrow \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \\ T^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &\equiv \mathbb{T}^+(\vec{p}_1) \otimes \mathbb{T}^+(\vec{p}_2) \otimes \mathbb{T}^+(\vec{p}_3), \quad T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \equiv \mathbb{T}^-(\vec{p}_1) \otimes \mathbb{T}^-(\vec{p}_2) \otimes \mathbb{T}^-(\vec{p}_3) \end{aligned} \quad (2.101)$$

Für diese Einbettungsoperatoren folgen dann mit (2.99) die gewünschten Eigenschaften

$$\begin{aligned} \Lambda^{+++}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) T^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &= T^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda), \quad \Lambda^{---}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) T^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = 0, \\ \Lambda^{---}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &= T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda), \quad \Lambda^{+++}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = 0, \end{aligned} \quad (2.102)$$

weshalb wir nun mit Hilfe der Operatoren T^\pm die Anteile Φ^\pm der Salpeter-Amplitude Φ als Einbettung von 3-fach tensorierten Pauli-Spinoren ξ^\pm darstellen können:

$$\Phi^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = T^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \xi^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda), \quad \Phi^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \xi^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \quad (2.103)$$

Damit folgt für die Salpeter-Amplitude:

$$\Phi = \Phi^+ + \Phi^- = T^+ \xi^+ + T^- \xi^-. \quad (2.104)$$

Der Zusammenhang $\Phi \leftrightarrow (\xi^+, \xi^-)$, wie er durch die Abbildungen $T^\pm : \xi^\pm \rightarrow \Phi^\pm$ zwischen der Salpeter-Amplitude

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \quad (2.105)$$

und den Amplituden

$$\xi^\pm : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \quad (2.106)$$

gegeben ist, ist eindeutig. Denn mit (2.100) folgen für T^\pm die Relationen

$$[T^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger T^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \mathbf{1}, \quad [T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \mathbf{1}, \quad [T^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger T^\mp(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = 0 \quad (2.107)$$

mit $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}}$. Deshalb gilt:

$$\xi^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = [T^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger \Phi(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda). \quad (2.108)$$

Definieren wir für Amplituden ξ^\pm die positiv definiten Skalarprodukte¹¹

$$\begin{aligned}\langle \xi_1^+ | \xi_2^+ \rangle &\equiv \int \frac{d^3 p_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\lambda}{(2\pi)^3} \xi_{1\alpha\beta\gamma}^{+*}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \xi_{2\alpha\beta\gamma}^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \\ \langle \xi_1^- | \xi_2^- \rangle &\equiv \int \frac{d^3 p_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\lambda}{(2\pi)^3} \xi_{1\alpha\beta\gamma}^{-*}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \xi_{2\alpha\beta\gamma}^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)\end{aligned}\quad (2.109)$$

so folgt für Amplituden $\Phi_1 \equiv T^+ \xi_1^+ + T^- \xi_1^-$ und $\Phi_2 \equiv T^+ \xi_2^+ + T^- \xi_2^-$ aus (2.107) darüberhinaus:

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \langle \xi_1^+ | \xi_2^+ \rangle + \langle \xi_1^- | \xi_2^- \rangle \quad (2.110)$$

d.h. die Einbettungsabbildungen stellen insbesondere Isometrien dar.

Mit der Zerlegung (2.104) der Salpeter-Amplitude und den Skalarprodukten (2.109) schreibt sich in diesem Zusammenhang die Normierungsbedingung

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = \langle \xi^+ | \xi^+ \rangle + \langle \xi^- | \xi^- \rangle = 2M . \quad (2.111)$$

Abschließend wollen wir T^\pm noch auf eine Form bringen, in der Spin-, Impuls-Anteil und Flavour-Anteil des Operators faktorisieren:

$$T^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \sum_{f_1, f_2, f_3=n,s} \tilde{T}^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) \bigotimes P_{f_1} \otimes P_{f_2} \otimes P_{f_3} \quad (2.112)$$

mit

$$\tilde{T}^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) \equiv \tilde{T}^\pm(\vec{p}_1; m_{f_1}) \otimes \tilde{T}^\pm(\vec{p}_2; m_{f_2}) \otimes \tilde{T}^\pm(\vec{p}_3; m_{f_3}) . \quad (2.113)$$

2.5.3 Die Zerlegung der $2 \times 2 \times 2$ - Amplituden ξ^\pm für ein Baryon mit definierten Quantenzahlen

Die Salpeter-Amplitude eines Baryons ist durch einen Satz von Quantenzahlen charakterisiert, dessen Observablen in der starken Wechselwirkung Erhaltungsgrößen darstellen. Unter Annahme einer exakten $SU(2) \otimes U(1)$ -Flavour-Invarianz (Isospin-Invarianz) sind die Quantenzahlen

- Spin (Gesamtdrehimpuls) J , mit 3-Komponente M_J
- Parität π
- Isospin T , mit 3-Komponente M_T
- Strangeness S^*

erhalten und bestimmen das Transformationsverhalten der Salpeter-Amplitude $\Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}$. Das Pauli-Prinzip erfordert darüberhinaus noch die totale Antisymmetrie der Salpeter-Amplitude unter Transpositionen $\Pi_{i,j} \in S_3$, d.h. Vertauschung sämtlicher Indizes und Koordinaten zweier Quarks i, j :

$$\Pi_{i,j} \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*} = -\Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*} . \quad (2.114)$$

Nach dem letzten Abschnitt können wir die Salpeter-Gleichung in Termen der 3-fach tensorierten Pauli-Spinoren ξ^\pm formulieren. Um die allgemeine Zerlegung und Struktur der ξ^\pm zu finden, müssen wir untersuchen, wie allgemeine Transformationen der Salpeter-Amplitude $\Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}$ sich durch die Einbettungen T^\pm auf die Amplituden ξ^\pm übertragen:

¹¹ $\alpha\beta\gamma$ sind hier immer noch Multi-Indizes; die Spinindizes laufen jetzt aber nur noch von 0 bis 1 (bzw. sind $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$).

- **Permutationssymmetrie**

Ein wesentlicher Punkt ist, daß die 3-Teilchen-Einbettungsoperatoren T^\pm symmetrische Operatoren sind. Aus ihrer Definition (2.101) ist unmittelbar ersichtlich, daß die T^\pm invariant unter beliebigen Permutationen $\Pi \in S_3$ sind, die gleichzeitig die Koordinaten, sowie Spin-, Flavour- und Colourindizes vertauschen:

$$[T^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda), \Pi]_- = 0 \quad \forall \Pi \in S_3. \quad (2.115)$$

Die Einbettungsoperatoren erhalten also die Symmetrie. Damit die Salpeter-Amplitude

$$\Phi_{\mathcal{A}} = T^+ \xi_{\mathcal{A}}^+ + T^- \xi_{\mathcal{A}}^- \quad (2.116)$$

total antisymmetrisch unter Teilchentranspositionen ist, müssen also $\xi_{\mathcal{A}}^+$ und $\xi_{\mathcal{A}}^-$ total symmetrisch sein:

$$\Pi \Phi_{\mathcal{A}} = -\Phi_{\mathcal{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \Pi \xi_{\mathcal{A}}^\pm = -\xi_{\mathcal{A}}^\pm \quad \text{für } \Pi \in S_3. \quad (2.117)$$

- **Flavoursymmetrie**

Wie bereits diskutiert, bricht die Einbettung T^\pm durch die Projektoren P_f (mit $f = n$ oder s) und ihre explizite Massenabhängigkeit $m_n < m_s$ die Flavour- $SU(3)$ -Symmetrie. Es ist aber unmittelbar einsichtig, daß Flavour- $SU(2) \otimes U(1)$ -Transformationen mit dem Einbettungsoperatoren T^\pm vertauschen, da die Generatoren der Untergruppe $SU(2) \otimes U(1) \subset SU(3)$, also die Gellman-Matrizen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und λ_8 mit den Projektoren P_f vertauschen. Für die Salpeter-Amplituden

$$\Phi_{T, M_T, S^*} = T^+ \xi_{T, M_T, S^*}^+ + T^- \xi_{T, M_T, S^*}^-$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \hat{T}^2 \Phi_{T, M_T, S^*} &= T(T+1) \Phi_{T, M_T, S^*} & \hat{T}^2 \xi_{T, M_T, S^*}^\pm &= T(T+1) \xi_{T, M_T, S^*}^\pm \\ \hat{T}_3 \Phi_{T, M_T, S^*} &= M_T \Phi_{T, M_T, S^*} & \hat{T}_3 \xi_{T, M_T, S^*}^\pm &= M_T \xi_{T, M_T, S^*}^\pm \\ \hat{S}^* \Phi_{T, M_T, S^*} &= S^* \Phi_{T, M_T, S^*} & \hat{S}^* \xi_{T, M_T, S^*}^\pm &= S^* \xi_{T, M_T, S^*}^\pm \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

mit den Isospin-Operatoren $\hat{T}_i \equiv \lambda_i/2$, $i = 1, 2, 3$ und dem Strangeness-Operator $\hat{S}^* \equiv \lambda_8/\sqrt{3} - \mathbf{1}_{\mathcal{F}}/3$

- **Verhalten unter Drehungen**

Die Salpeter-Amplitude Φ_{J, M_J} mit Spin J und 3-Komponente M_J transformiert sich unter Drehungen $R \in SO(3)$ gemäß

$$\Phi_{J, M_J}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \sum_{M'_J} S_u \otimes S_u \otimes S_u \Phi_{J, M_J}(R^{-1}\vec{p}_\rho, R^{-1}\vec{p}_\lambda) D_{M_J M'_J}^{J*}(R) \quad (2.118)$$

Hiebei ist in der Weyl-Darstellung

$$S_u = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

mit $u \in SU(2)$, $u = e^{-i\vec{\sigma}\vec{\omega}}$ die zur Drehung R mit Drehvektor $\vec{\omega}$ korrespondierende Matrix, d.h. $u \sigma(p) u^\dagger = \sigma(Rp)$.

Nun finden wir für die Anwendung von S_u auf den in (2.93) definierten Einteilchen-Einbettungsoperator $\tilde{T}^\pm(\vec{p}; m)$ die Intertwining-Relation (siehe Gleichung (C.40) im Anhang C.3.1):

$$S_u \tilde{T}^\pm(R^{-1} \vec{p}; m) = \tilde{T}^\pm(\vec{p}; m) u, \quad (2.120)$$

mit der unmittelbar für die 3-Teilchen-Einbettungen T^\pm die entsprechende Intertwining-Relation folgt:

$$S_u \otimes S_u \otimes S_u T^\pm(R^{-1} \vec{p}_\rho, R^{-1} \vec{p}_\lambda) = T^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) u \otimes u \otimes u. \quad (2.121)$$

Damit erhalten wir das Verhalten der Amplituden ξ_{J,M_J}^\pm mit

$$\Phi_{J,M_J} = T^+ \xi_{J,M_J}^+ + T^- \xi_{J,M_J}^-$$

unter Drehungen:

$$\xi_{J,M_J}^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \sum_{M_J'} u \otimes u \otimes u \xi_{J,M_J'}^\pm(R^{-1} \vec{p}_\rho, R^{-1} \vec{p}_\lambda) D_{M_J M_J'}^{J*}(R) \quad (2.122)$$

Das ist genau das nichtrelativistische Transformationsverhalten eines Systems von drei Spin-1/2-Fermionen mit Gesamtdrehimpuls J .

• Verhalten unter Paritätstransformationen

Das Transformationsverhalten der Salpeter-Amplitude Φ_π mit Parität π unter Paritätstransformationen \mathcal{P} ist gegeben durch

$$\Phi_\pi(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \pi (\mathcal{P} \Phi_\pi)(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \pi \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \Phi_\pi(-\vec{p}_\rho, -\vec{p}_\lambda) \quad (2.123)$$

Zwischen γ^0 und den Einteilchen-Einbettungen $\tilde{T}^\pm(\vec{p}; m)$ findet man die Intertwining-Relation (siehe Gleichung (C.44) im Anhang C.3.2)

$$\gamma^0 \tilde{T}^+(-\vec{p}; m) = \tilde{T}^+(\vec{p}; m) \mathbf{1}_{\mathbb{C}_2}, \quad \gamma^0 \tilde{T}^-(-\vec{p}; m) = \tilde{T}^-(\vec{p}; m) (-\mathbf{1}_{\mathbb{C}_2}) \quad (2.124)$$

und damit

$$\begin{aligned} \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &= T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \mathbf{1}_{\mathbb{C}_2} \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}_2} \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}_2}, \\ \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &= T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) (-\mathbf{1}_{\mathbb{C}_2} \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}_2} \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}_2}). \end{aligned} \quad (2.125)$$

Mit dieser Relation ist das Transformationsverhalten der Amplituden $\xi_\pi^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda), \xi_\pi'^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)$ mit

$$\Phi_\pi = T^+ \xi_\pi^+ + T^- \xi_\pi'^-$$

unter Paritätstransformationen sofort klar:

$$\begin{aligned} \xi_\pi^+(-\vec{p}_\rho, -\vec{p}_\lambda) &= \pi \xi_\pi^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda), \\ \xi_\pi'^-(-\vec{p}_\rho, -\vec{p}_\lambda) &= -\pi \xi_\pi'^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Zunächst fällt auf, daß die Darstellung der Paritätstransformation für die 3-fach tensorierten Pauli-Spinoren ξ^\pm eine sehr einfache Form hat; sie besteht einfach in der Transformation der Argumente $\vec{p} \rightarrow \mathcal{P} p = -\vec{p}$ ohne eine zusätzliche Matrixmultiplikation auf dem $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Dieses ist eine Eigenart der von uns speziell verwendeten Einbettungen $\tilde{T}^\pm(\vec{p}; m)$ unter Verwendung der Wurzeln $\sqrt{\sigma(\vec{p})}$. Desweiteren ist zu beachten, daß die negative Komponente $\xi_\pi'^- \equiv \xi_\pi^-$ mit

$$\xi_\pi^-(-\vec{p}_\rho, -\vec{p}_\lambda) = -\pi \xi_\pi^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \quad (2.127)$$

unter dem Vorzeichenwechsel im Argument die umgekehrte Parität $-\pi$ besitzt.

Wir fassen zusammen:

Die Einbettung von total antisymmetrischen $2 \times 2 \times 2$ -Amplituden $\xi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}^+$ und $\xi_{J^{-\pi}, M_J, T, M_T, S^*}^-$ mit den oben beschriebenen Eigenschaften und Transformationsverhalten liefert eine total antisymmetrische $4 \times 4 \times 4$ -Amplitude

$$\Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = T^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \xi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) + T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \xi_{J^{-\pi}, M_J, T, M_T, S^*}^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \quad (2.128)$$

mit dem richtigen Transformationsverhalten einer Salpeter-Amplitude für ein Baryon mit den Quantenzahlen J^π, M_J, T, M_T, S^* .

Das Transformationsverhalten dieser Amplituden ξ^\pm entspricht genau dem einer nichtrelativistischen total antisymmetrischen Baryon-Wellenfunktion, wobei ξ^+ die Parität π des Baryons, ξ^- dagegen die umgekehrte Parität $-\pi$ besitzt.

Für die Konstruktion einer geeigneten total symmetrischen Baryonbasis zur numerischen Lösung der Salpeter-Gleichung können wir also auf die im nichtrelativistischen Quarkmodell für Baryonen verwendeten Techniken [21, 26, 25] zurückgreifen. Eine solche nichtrelativistische Baryon-Wellenfunktion $\xi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}$ hat die allgemeine Form [21]

$$\xi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \sum_{R_L R_S R_F} \left\{ \left[[\psi_{\alpha L}^\pi(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]_{R_L} \otimes [\chi_S]_{R_S} \right]_{M_J}^J \otimes [\phi_{M_T}^{T S^*}]_{R_F} \right]_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \right\}_{\mathcal{A}} \quad (2.129)$$

mit

- $[\psi_{\alpha L}^\pi(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]_{R_L}$ die Impulsraum-Wellenfunktion mit Gesamtbahndrehimpuls L aus der irreduziblen Darstellung R_L der Permutationsgruppe S_3 .
- $[\chi_S]_{R_S}$ die Spinraum-Wellenfunktion $\in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ mit Gesamtspin S aus der irreduziblen Darstellung R_S von S_3 .
- $[\phi_{M_T}^{T S^*}]_{R_F}$ die $SU(3)$ -Flavourwellenfunktion mit Isospin T , 3-Komponente M_T und Strangeness S^* aus dem irreduziblen Unterraum R_F der S_3 .
- $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ die total antisymmetrische Colour- $SU(3)$ -Singulett-Wellenfunktion.

Die Spin- und Impuls-Wellenfunktionen koppeln wie gewöhnlich mit Clebsch-Gordan-Koeffizienten zum Gesamtdrehimpuls J, M_J d.h.

$$[\psi_{\alpha L}^\pi(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \otimes \chi_S]_{M_J}^J \equiv \sum_{M_L M_S} \langle L M_L ; S M_S | J M_J \rangle \psi_{\alpha L M_L}^\pi(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \chi_{S M_S} \quad (2.130)$$

Die irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe S_3 auf dem Impuls-, Spin- und Flavourraum werden zu einer total symmetrischen Darstellung \mathcal{S} zusammengesetzt, d.h. man bildet die Kombinationen R_L, R_S, R_F , für die gilt:

$$R_L \otimes R_S \otimes R_F = \mathcal{S} \quad (2.131)$$

Die Tensorierung mit der total antisymmetrischen Colorwellenfunktion $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ liefert dann eine total antisymmetrische Gesamtwellenfunktion:

$$[R_L \otimes R_S \otimes R_F]_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{A} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{A} = \mathcal{A} \quad (2.132)$$

Im nächsten Kapitel werden wir im Zusammenhang mit der numerischen Lösung der Salpeter-Gleichung etwas genauer auf die Konstruktion von Baryonbasiszuständen eingehen. Wir wollen

an dieser Stelle das wichtige Resultat dieses Abschnitts noch diskutieren:

Daß wir die Konstruktion der total antisymmetrischen Basiszustände für die Salpeter-Amplitude durch die Einbettung einer total antisymmetrischen nichtrelativistischen Baryonbasis der Form (2.129) konstruieren können, ist ein ganz wesentlicher Aspekt unseres Modells! Betrachtet man die experimentell gefundenen, tiefsten Baryon-Niveaus mit Quarkinhalten u, d und s , so lassen sich diese genau 18 Baryonen in ein Oktett mit Spin $J = 1/2$ und in ein Dekuplett mit Spin $J = 3/2$ einordnen. Unter Berücksichtigung der möglichen Spineinstellungen M_J gibt es also insgesamt 56 tiefliegende, experimentell beobachtete Baryonzustände. Nimmt man nun an, daß diese Baryonen sämtlich Grundzustandsbaryonen sind, deren Impuls- bzw. Ortswellenfunktionen total symmetrische S-Wellen darstellen, dann muß nach (2.129) der Spin-Flavour-Produktzustand total symmetrisch sein. Das nichtrelativistische $SU(3)_{Flavour}$ -Quarkmodell mit den drei Flavourfreiheitsgraden u, d und s und dem 8-dimensionalen $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ -Spinraum liefert genau diese Anzahl von 56 total symmetrischen Spin-Flavour-Produktzuständen als invariantes 56-plett der Gruppe $SU(6) \times S_3$ (vergl. Abschnitt 3.1.4):

$$56_S^{Spin \times Flavour} = 2_{(M_S, M_A)}^{Spin} \otimes 8_{(M_S, M_A)}^{Flavour} \oplus 4_S^{Spin} \otimes 10_S^{Flavour}. \quad (2.133)$$

Das nichtrelativistische Quarkmodell besitzt also genau die Anzahl der Freiheitsgrade, die zur Beschreibung der experimentellen Situation gebraucht wird.

In einem relativistischen Quarkmodell werden i.a. die 3-Quark-Zustände mit 4-komponentigen Dirac-Spinoren, anstatt mit Pauli-Spinoren gebildet. Nun besitzt ein Dirac-Spinor doppelt so viele Freiheitsgrade wie ein Pauli-Spinor. Neben der Spinausrichtung besitzt ein Dirac-Spinor als weiteren Freiheitsgrad die sogenannte Helizität, d.h. man unterscheidet rechts- und linkshändige Spinoren, welche Eigenzustände von γ^5 zu den Eigenwerten ± 1 sind. Der relativistische, 64-dimensionale 3-Quark-Spinraum hat damit wesentlich mehr Freiheitsgrade, so daß man in einem relativistischen $SU(3)$ -Quarkmodell mehr Multipletts erhält [16, 17, 20] als im nichtrelativistischen. Das widerspricht der experimentellen Situation. Um den Widerspruch zu beheben, werden in [16, 17] nur diejenigen Spin-Amplituden χ berücksichtigt, die im Ruhesystem der Bedingung

$$(\gamma^0 - \mathbb{1}_{\mathbb{C}^4}) \chi = 0 \quad (2.134)$$

in allen drei Indizes genügen und damit den nichtrelativistischen Spin-Amplituden entsprechen. Einen solchen Kunstgriff brauchen wir in unserem Modell nicht zu unternehmen, da die Entsprechung mit den nichtrelativistischen Pauli-Spinoren in natürlicher Weise aus der durch Λ^{+++} und Λ^{---} gegebenen Projektorstruktur der Salpeter-Gleichung folgt!

Streng genommen haben wir einen solchen Kunstgriff aber auch getan, nämlich indem wir den irreduziblen 2-Fermionen-Wechselwirkungskern $K^{(2)}$ von vornherein vernachlässigt haben: $K^{(2)} = 0$. Wird $K^{(2)}$ in der instantanen Näherung und bei der Reduktion der Bethe-Salpeter-Amplitude zur Salpeter-Amplitude mitberücksichtigt, so erhält die Salpeter-Amplitude sämtliche Anteile $\Phi^{(\pm)_1(\pm)_2(\pm)_3} = \Lambda^{(\pm)_1(\pm)_2(\pm)_3} \Phi$, die i.a. aus Mischungen von Spinoren positiver und negativer Energie bestehen. Wir bekämen also die oben genannten Schwierigkeiten mit zu vielen Freiheitsgraden. Dieses ist also eine nachträgliche Motivation für die Vernachlässigung von $K^{(2)}$.

Kapitel 3

Die Numerische Lösung der Salpeter-Gleichung

In diesem Kapitel beschreiben wir die Methode, mit der wir das Eigenwertproblem

$$\mathcal{H} \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*} = M \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}$$

für ein Baryon mit den Quantenzahlen J^π, M_J, T, M_T, S^* in der Praxis lösen. Die Idee ist, die total antisymmetrische Baryon-Wellenfunktion $\Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}$ nach einer geeigneten endlichen Basis zu entwickeln. Wir nehmen dazu an, daß der von dieser Basis aufgespannte Konfigurationsraum groß genug gewählt werden kann, um konvergente Lösungen zu erhalten.

Wie diese Basis zu konstruieren ist, ist nach dem letzten Abschnitt klar:

Auf der Ebene der $2 \times 2 \times 2$ -Amplituden wird in vollkommener Analogie zum nichtrelativistischen Quarkmodell [21, 26, 25] eine total antisymmetrische Baryonbasis konstruiert. Für die Impulswellenfunktionen werden wir dabei die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators verwenden, die viele Eigenschaften haben, welche die Berechnung von 3-Teilchen-Matrixelementen technisch stark vereinfachen.

Die Basis für die volle Salpeter-Amplitude bekommen wir schließlich durch Anwendung der Einbettungsoperatoren T^\pm .

Durch diese endliche Entwicklung der Salpeter-Amplitude werden wir auf ein reelles, hermitesches (also symmetrisches) Eigenwertproblem in Matrixform geführt, dessen Lösung mit Standard-Diagonalisierungsverfahren trivial ist.

3.1 Die Konstruktion der nichtrelativistischen $2 \times 2 \times 2$ -Baryonbasis

3.1.1 Die Colour-Wellenfunktion

Die Colour-Symmetriegruppe ist die Gruppe $SU(3)$. Für die explizite Konstruktion der Colour-Wellenfunktion benutzt man die fundamentale dreidimensionale Darstellung **3** ($|r\rangle, |g\rangle, |b\rangle$) der Colour- $SU(3)$ -Gruppe. Die Ausreduktion des dreifachen Tensorproduktes nach irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe S_3 liefert ein total symmetrisches (\mathcal{S}) Dekuplett **10**, das gemischt symmetrische ($M_{\mathcal{S}}$) und gemischt antisymmetrische ($M_{\mathcal{A}}$) Oktett **8** und das total antisymmetrische (\mathcal{A}) Singulett **1**:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_{\mathcal{S}} \oplus \mathbf{8}_{M_{\mathcal{S}}} \oplus \mathbf{8}_{M_{\mathcal{A}}} \oplus \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \quad (3.1)$$

Nun sind in der Natur ausschließlich farbneutrale, d.h. Colour-Singulett Zustände realisiert. In der Ausreduktion (3.1) stellt also nur die total antisymmetrische Darstellung $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ einen physika-

lischen Zustand dar. Dieser ist in der fundamentalen Darstellung gegeben durch

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{ijk} |c_i\rangle \otimes |c_j\rangle \otimes |c_k\rangle \quad \text{mit } c_i, c_j, c_k \in \{r, g, b\}. \quad (3.2)$$

Die Kopplung zweier Quarks im Colour-Raum

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}} \quad (3.3)$$

liefert ein Colour-Sextett $\mathbf{6}$ und das Anti-Triplett $\bar{\mathbf{3}}$. Nur das Anti-Triplett $\bar{\mathbf{3}}$ kann mit einem dritten Quark zu einem Singulett koppeln, weshalb im Baryon die Quarkpaare jeweils Anti-Triplett-Zustände bilden.

3.1.2 Die Spin-Wellenfunktionen

Die Symmetrie-Gruppe für den Spin der drei Quarks (Fermionen) ist die Gruppe $SU(2)$. Durch die Ausreduktion

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4}_S \oplus \mathbf{2}_{M_S} \oplus \mathbf{2}_{M_A} \quad (3.4)$$

des dreifachen Tensorproduktes der Fundamentaldarstellung $\mathbf{2}$ mit

$$|s = \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

nach $SU(2) \times S_3$ erhält man das total symmetrische (\mathcal{S}) Quartett $\mathbf{4}$ und das gemischt symmetrische (M_S) sowie das gemischt antisymmetrische (M_A) Dublett $\mathbf{2}$. Eine total antisymmetrische (\mathcal{A}) 3-Teilchen-Spin-Wellenfunktion existiert nicht! Die Basiszustände werden in der bekannten Weise durch Clebsch-Gordan-Kopplungen der Spins realisiert, so daß die allgemeine Spin-Wellenfunktion darstellbar ist durch

$$|S, S_{12}, M_S\rangle = \left[\left[\left| \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \right\rangle \right]^{S_{12}} \otimes \left| \frac{1}{2} \right\rangle \right]_{M_S}^S, \quad (3.6)$$

wobei S der Gesamtspin, S_{12} der gekoppelte Spin von Teilchen 1 und 2 und M_S die 3-Komponente des Gesamtpins ist. Dann gilt im einzelnen für die irreduziblen Darstellungen mit S_3 -Symmetrie R_S :

Darstellung	S_3 -Symmetrie R_S	S	S_{12}
$\mathbf{4}$	\mathcal{S}	$\frac{3}{2}$	1
$\mathbf{2}$	M_S	$\frac{1}{2}$	1
$\mathbf{2}$	M_A	$\frac{1}{2}$	0

3.1.3 Die Flavour-Wellenfunktionen

Wir wollen in diesem Modell Baryonen mit den drei Flavour-Freiheitsgraden 'up' (u), 'down' (d) und 'strange' (s) beschreiben. Wir haben bereits erwähnt, daß die $SU(3)$ -Symmetrie nicht exakt ist, sondern durch die größere Masse des s-Quarks $m_n < m_s$ explizit gebrochen ist. Diese Symmetrie-Brechung äußert sich in der Salpeter-Gleichung durch das Auftreten der Flavour-Projektoren P_n und P_s . Die $SU(2) \otimes U(1)$ -Symmetrie kann dagegen in der starken Wechselwirkung in guter Näherung als exakt angenommen werden, weshalb der Wechselwirkungskern invariant unter Flavour- $SU(2) \otimes U(1)$ -Transformationen sein muß. Da die Projektoren P_n und

P_s mit den Generatoren dieser Untergruppe vertauschen, ist die Salpeter-Gleichung dann invariant unter $SU(2) \otimes U(1)$ -Transformationen, so daß der Isospin T , die 3-Komponente des Isospin M_T und die Strangeness S^* 'gute' Quantenzahlen der Baryonen sind. Zur Konstruktion einer Basis mit diesen Quantenzahlen auf dem Flavourraum fassen wir die Zustände $|u\rangle$ und $|d\rangle$ zu einem Isospin-Dublett zusammen und fassen $|s\rangle$ als Isospin-Singulett auf. In der Notation $|t, m_t\rangle$ ist dann:

$$|u\rangle = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle, \quad |d\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \quad |s\rangle = |0, 0\rangle. \quad (3.7)$$

Eigenzustände zum Isospin T, M_T werden wieder durch $SU(2)$ -Clebsch-Gordan-Kopplung konstruiert:

$$|(t_1, t_2, t_3) T, T_{12}, M_T\rangle = \left[[|t_1\rangle \otimes |t_2\rangle]^{T_{12}} \otimes |t_3\rangle \right]_{M_T}^T \quad \text{mit } t_i = \begin{cases} t(n) = \frac{1}{2} & \text{Flavour } n=u,d \\ t(s) = 0 & \text{Flavour } s \end{cases} \quad (3.8)$$

Mit diesen Flavourwellenfunktionen konstruiert man die 13 in der Tabelle 3.1 angegebenen $SU(2) \otimes U(1)$ -Flavour-Basiszustände $|T, T_{12}; S^*\rangle_{R_F^{12}}$ mit definierter Symmetrie R_F^{12} bei Vertauschung von Teilchen 1 und 2.

$ T, T_{12}; S^*\rangle_{R_F^{12}} : \quad SU(2) \otimes U(1)$ -Flavourzustände $ T, T_{12}; S^*\rangle_{R_F^{12}}$	T	T_{12}	S^*	R_F^{12}
$ \frac{1}{2}, 1; 0\rangle_{S_{12}} = \left[[n\rangle \otimes n\rangle]^1 \otimes n\rangle \right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	1	0	S_{12}
$ \frac{1}{2}, 0; 0\rangle_{A_{12}} = \left[[n\rangle \otimes n\rangle]^0 \otimes n\rangle \right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	0	A_{12}
$ \frac{3}{2}, 1; 0\rangle_{S_{12}} = \left[[n\rangle \otimes n\rangle]^1 \otimes n\rangle \right]^{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{2}$	1	0	S_{12}
$ 0, \frac{1}{2}; -1\rangle_{A_{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left[[n\rangle \otimes s\rangle]^{\frac{1}{2}} \otimes n\rangle \right]^0 - \left[[s\rangle \otimes n\rangle]^{\frac{1}{2}} \otimes n\rangle \right]^0 \right)$	0	$\frac{1}{2}$	-1	A_{12}
$ 0, 0; -1\rangle_{A_{12}} = \left[[n\rangle \otimes n\rangle]^0 \otimes s\rangle \right]^0$	0	0	-1	A_{12}
$ 0, \frac{1}{2}; -1\rangle_{S_{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left[[n\rangle \otimes s\rangle]^{\frac{1}{2}} \otimes n\rangle \right]^0 + \left[[s\rangle \otimes n\rangle]^{\frac{1}{2}} \otimes n\rangle \right]^0 \right)$	0	$\frac{1}{2}$	-1	S_{12}
$ 1, \frac{1}{2}; -1\rangle_{S_{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left[[n\rangle \otimes s\rangle]^{\frac{1}{2}} \otimes n\rangle \right]^1 + \left[[s\rangle \otimes n\rangle]^{\frac{1}{2}} \otimes n\rangle \right]^1 \right)$	1	$\frac{1}{2}$	-1	S_{12}
$ 1, 1; -1\rangle_{S_{12}} = \left[[n\rangle \otimes n\rangle]^1 \otimes s\rangle \right]^1$	1	1	-1	S_{12}
$ 1, \frac{1}{2}; -1\rangle_{A_{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left[[n\rangle \otimes s\rangle]^{\frac{1}{2}} \otimes n\rangle \right]^1 - \left[[s\rangle \otimes n\rangle]^{\frac{1}{2}} \otimes n\rangle \right]^1 \right)$	1	$\frac{1}{2}$	-1	A_{12}
$ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -2\rangle_{S_{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left[[n\rangle \otimes s\rangle]^{\frac{1}{2}} \otimes s\rangle \right]^{\frac{1}{2}} + \left[[s\rangle \otimes n\rangle]^{\frac{1}{2}} \otimes s\rangle \right]^{\frac{1}{2}} \right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	S_{12}
$ \frac{1}{2}, 0; -2\rangle_{S_{12}} = \left[[s\rangle \otimes s\rangle]^0 \otimes n\rangle \right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-2	S_{12}
$ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -2\rangle_{A_{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left[[n\rangle \otimes s\rangle]^{\frac{1}{2}} \otimes s\rangle \right]^{\frac{1}{2}} - \left[[s\rangle \otimes n\rangle]^{\frac{1}{2}} \otimes s\rangle \right]^{\frac{1}{2}} \right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	A_{12}
$ 0, 0; -3\rangle_{S_{12}} = \left[[s\rangle \otimes s\rangle]^0 \otimes s\rangle \right]^0 = s\rangle \otimes s\rangle \otimes s\rangle$	0	0	-3	S_{12}

Tabelle 3.1: $SU(2) \otimes U(1)$ -Flavourbasis

Unter Berücksichtigung aller jeweiligen Ladungszustände bekommen wir insgesamt 27 Basiszustände, die den gesamten 3-Teilchen-Flavourraum aufspannen. Jeder der 13 in Tabelle 3.1 aufgeführten Zustände ist durch den Gesamtisospin T , den aus Teilchen 1 und 2 gekoppelten Isospin T_{12} , der additiven Strangeness-Quantenzahl S^* , sowie der S_2 -Permutationssymmetrie R_F^{12} der ersten beiden Teilchen eindeutig charakterisiert. Da die Isospin- $SU(2)$ -Symmetrie in der

starken Wechselwirkung exakt ist, brauchen wir zwischen den verschiedenen Ladungszuständen (M_T) innerhalb eines Isospin-Multipletts nicht unterscheiden!

Diese Zustände haben jedoch keine definierte Symmetrie unter Permutationen der Gruppe S_3 . Flavour-Zustände definierter S_3 -Symmetrie bekommen wir durch die Ausreduktion der dreifach tensorierten fundamentalen Darstellung der Flavour- $SU(3)$ -Gruppe in die irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe S_3 , wie im Fall der Colour- $SU(3)$ -Gruppe:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_{M_S} \oplus \mathbf{8}_{M_A} \oplus \mathbf{1}_A \quad (3.9)$$

Die Zustände $|T, S^*\rangle_{R_F}$ der einzelnen Multipletts mit Permutationssymmetrie R_F und den definierten Quantenzahlen T und S^* stellen sich als Linearkombinationen der $SU(2) \otimes U(1)$ -Basiszustände $|T, T_{12}, S^*\rangle_{R_F^{12}}$ aus Tabelle 3.1 dann wie folgt dar:

- total symmetrisches Dekuplett $\mathbf{10}_S$

$ T, S^*\rangle_{R_F}$	=	Linearkombination aus Tab. 3.1	T	S^*	Ladungszustände
$ \frac{3}{2}, 0\rangle_S$	=	$+ \frac{3}{2}, 1; 0\rangle_{S_{12}}$	$\frac{3}{2}$	0	$\Delta^{++} \Delta^+ \Delta^0 \Delta^-$
$ 1, -1\rangle_S$	=	$+\sqrt{\frac{2}{3}} 1, \frac{1}{2}; -1\rangle_{S_{12}} + \sqrt{\frac{1}{3}} 1, 1; -1\rangle_{S_{12}}$	1	-1	$\Sigma^{*+} \Sigma^{*0} \Sigma^{*-}$
$ \frac{1}{2}, -2\rangle_S$	=	$+\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -2\rangle_{S_{12}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}, 0; -2\rangle_{S_{12}}$	$\frac{1}{2}$	-2	$\Xi^{*0} \Xi^{*-}$
$ 0, -3\rangle_S$	=	$+ 0, 0; -3\rangle_{S_{12}}$	0	-3	Ω^-

- gemischt symmetrisches Oktett $\mathbf{8}_{M_S}$

$ T, S^*\rangle_{R_F}$	=	Linearkombination aus Tab. 3.1	T	S^*	Ladungszustände
$ \frac{1}{2}, 0\rangle_{M_S}$	=	$- \frac{1}{2}, 1; 0\rangle_{S_{12}}$	$\frac{1}{2}$	0	$p \quad n$
$ 1, -1\rangle_{M_S}$	=	$+\sqrt{\frac{1}{3}} 1, \frac{1}{2}; -1\rangle_{S_{12}} - \sqrt{\frac{2}{3}} 1, 1; -1\rangle_{S_{12}}$	1	-1	$\Sigma^+ \Sigma^0 \Sigma^-$
$ 0, -1\rangle_{M_S}$	=	$+ 0, \frac{1}{2}; -1\rangle_{S_{12}}$	0	-1	Λ_8^0
$ \frac{1}{2}, -2\rangle_{M_S}$	=	$-\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -2\rangle_{S_{12}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}, 0; -2\rangle_{S_{12}}$	$\frac{1}{2}$	-2	$\Xi^0 \Xi^-$

- gemischt antisymmetrisches Oktett $\mathbf{8}_{M_A}$

$ T, S^*\rangle_{R_F}$	=	Linearkombination aus Tab. 3.1	T	S^*	Ladungszustände
$ \frac{1}{2}, 0\rangle_{M_A}$	=	$+ \frac{1}{2}, 0; 0\rangle_{A_{12}}$	$\frac{1}{2}$	0	$p \quad n$
$ 1, -1\rangle_{M_A}$	=	$+ 1, 0; -1\rangle_{A_{12}}$	1	-1	$\Sigma^+ \Sigma^0 \Sigma^-$
$ 0, -1\rangle_{M_A}$	=	$+\sqrt{\frac{1}{3}} 0, \frac{1}{2}; -1\rangle_{A_{12}} - \sqrt{\frac{2}{3}} 0, 0; -1\rangle_{A_{12}}$	0	-1	Λ_8^0
$ \frac{1}{2}, -2\rangle_{M_A}$	=	$+ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -2\rangle_{A_{12}}$	$\frac{1}{2}$	-2	$\Xi^0 \Xi^-$

- total antisymmetrisches Singulett $\mathbf{1}_A$

$ T, S^*\rangle_{R_F}$	=	Linearkombination aus Tab. 3.1	T	S^*	Ladungszustände
$ 0, 0\rangle_A$	=	$+\sqrt{\frac{2}{3}} 0, \frac{1}{2}; -1\rangle_{A_{12}} - \sqrt{\frac{1}{3}} 0, 0; -1\rangle_{A_{12}}$	0	-1	Λ_1^0

Diese Zustände mit definierter S_3 -Permutationssymmetrie werden, wie im folgenden gezeigt, zur Konstruktion der total antisymmetrischen $2 \times 2 \times 2$ -Baryonbasis benutzt.

3.1.4 Die Kombination von Spin und Flavour

Im nächsten Schritt werden aus den Spin- und Flavour-Wellenfunktionen Produktwellenfunktionen definierter S_3 -Symmetrie konstruiert. Bisher haben wir die Spin-Wellenfunktionen nach irreduziblen Darstellungen von $SU(2) \times S_3$ und die Flavourfunktionen nach irreduziblen Darstellungen von $SU(3) \times S_3$ klassifiziert. Die Produktzustände sind also irreduziblen Darstellungen von $SU(2) \otimes SU(3) \subset SU(6)$, die wir nun wieder nach irreduziblen Darstellungen von $SU(6) \times S_3$

ausreduzieren können. Die Ausreduktion der dreifach tensorierten fundamentalen Darstellung **6**

$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{56}_S \oplus \mathbf{70}_{M_S} \oplus \mathbf{70}_{M_A} \oplus \mathbf{20}_A \quad (3.10)$$

liefert das total symmetrische 56-plett, das gemischt symmetrische und gemischt antisymmetrische 70-plett, sowie das total antisymmetrische 20-plett. Die Zustände der einzelnen Multipletts berechnen sich folgendermaßen aus den Zuständen der Spin- $SU(2)$ - und Flavour- $SU(3)$ -Multipletts [26]:

$$\begin{aligned} \mathbf{56}_S & \quad \begin{array}{l} 4_S \otimes 10_S \\ \mathbf{2}_{(M_S, M_A)} \otimes \mathbf{8}_{(M_S, M_A)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \chi_S \phi_S \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{M_S} \phi_{M_S} + \chi_{M_A} \phi_{M_A}) \end{array} \\ \mathbf{70}_{M_S} & \quad \begin{array}{l} 4_S \otimes 8_{M_S} \\ \mathbf{2}_{M_A} \otimes \mathbf{1}_A \\ \mathbf{2}_{(M_A, M_S)} \otimes \mathbf{8}_{(M_A, M_S)} \\ \mathbf{2}_{M_S} \otimes 10_S \end{array} \quad \begin{array}{l} \chi_S \phi_{M_S} \\ \chi_{M_A} \phi_A \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{M_A} \phi_{M_A} - \chi_{M_S} \phi_{M_S}) \\ \chi_{M_S} \phi_S \end{array} \\ \mathbf{70}_{M_A} & \quad \begin{array}{l} 4_S \otimes 8_{M_A} \\ \mathbf{2}_{M_S} \otimes \mathbf{1}_A \\ \mathbf{2}_{(M_S, M_A)} \otimes \mathbf{8}_{(M_S, M_A)} \\ \mathbf{2}_{M_A} \otimes 10_S \end{array} \quad \begin{array}{l} \chi_S \phi_{M_A} \\ \chi_{M_S} \phi_A \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{M_S} \phi_{M_A} + \chi_{M_A} \phi_{M_S}) \\ \chi_{M_A} \phi_S \end{array} \\ \mathbf{20}_A & \quad \begin{array}{l} 4_S \otimes \mathbf{1}_A \\ \mathbf{2}_{(M_S, M_A)} \otimes \mathbf{8}_{(M_A, M_S)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \chi_S \phi_A \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{M_S} \phi_{M_A} - \chi_{M_A} \phi_{M_S}) \end{array} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hierbei bezeichnet χ die Spin- und ϕ die Flavourfunktion.

3.1.5 Die Impuls-(Orts-)raum-Wellenfunktionen

Für den Impulsanteil der $2 \times 2 \times 2$ -Baryonbasis wählen wir die Eigenfunktionen des quantenmechanischen harmonischen Oszillators für drei Teilchen gleicher Masse im Ruhesystem. Diese Oszillatorbasis hat viele günstige Eigenschaften, die die Berechnung von 3-Teilchen-Matrixelementen drastisch vereinfachen [31]. Zu der wichtigsten Eigenschaft der Oszillatorfunktionen gehören die sogenannten Talmi-Moshinsky-Transformationen, die auf der Oszillatorbasis den Wechsel von einem Satz Relativkoordinaten in einen anderen Satz beschreiben, der durch zyklische Permutation der Teilchenindizes aus dem ersten Satz hervorgeht. Die Oszillatorbasis mit ihren Eigenschaften wird im Anhang D ausführlich beschrieben.

Unsere Impulsraum-Basiszustände als Funktion der Relativimpulse \vec{p}_ρ und \vec{p}_λ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda | n_\rho l_\rho n_\lambda l_\lambda; LM \rangle &= \langle \vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda | \alpha; LM \rangle = (2\pi)^3 \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\lambda) \right]_M^L \\ &= (2\pi)^3 R_{n_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(|\vec{p}_\rho|) R_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(|\vec{p}_\lambda|) \left[Y_{l_\rho}(\hat{p}_\rho) \otimes Y_{l_\lambda}(\hat{p}_\lambda) \right]_M^L. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Hierbei sind die $R_{nl}^\beta(\cdot)$ die reellen Radialfunktionen des quantenmechanischen (1-Teilchen-) Oszillators. Die genaue Definition dieser Funktionen ist im Anhang D angegeben. Die Funktionen Y_{lm} sind die gewöhnlichen Kugelflächenfunktionen. Die Drehimpulse l_ρ und l_λ der beiden Oszillatoren $\phi_{n_\lambda l_\lambda}$ und $\phi_{n_\rho l_\rho}$ sind mittels Clebsch-Gordan-Kopplung zum Gesamtdrehimpuls L gekoppelt:

$$\left[\phi_{n_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\lambda) \right]_M^L = \sum_{m_\rho, m_\lambda} \langle l_\rho m_\rho, l_\lambda m_\lambda | LM \rangle \phi_{n_\rho l_\rho m_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho) \phi_{n_\lambda l_\lambda m_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\lambda). \quad (3.13)$$

Die Oszillatoreigenfunktionen sind charakterisiert durch:

- L : Gesamtdrehimpuls aus der Kopplung der Relativdrehimpulse l_ρ und l_λ , also

$$\vec{L} = \vec{l}_\rho + \vec{l}_\lambda, \quad d.h. |l_\rho - l_\lambda| \leq L \leq l_\rho + l_\lambda, \quad (3.14)$$

- N : Energiequantenzahl

$$N \equiv 2n_\rho + l_\rho + 2n_\lambda + l_\lambda \quad (3.15)$$

- α : Die verschiedenen mit (3.14) und (3.15) verträglichen $\alpha = (n_\rho, l_\rho, n_\lambda, l_\lambda)$ indizieren die Oszillatorzustände des Unterraumes $\mathcal{U}(N, L)$ mit gleichem N und L durch. Diese Unterräume sind gerade die invarianten Darstellungsräume der von (12) und (123) generierten Permutationen $\Pi \in S_3$. Die Größe des Unterraumes ist hierbei gegeben durch

$$\dim \mathcal{U}(N, L) = \begin{cases} \frac{1}{8}(L+1)(N-L+2)(N-L+4) & \text{falls } N-L \text{ gerade} \\ \frac{1}{8}L(N-L+1)(N-L+3) & \text{falls } N-L \text{ ungerade} \end{cases} \quad (3.16)$$

- β : Oszillatorparameter. Dieser skaliert die Oszillatoreigenfunktionen gemäß

$$\left[\phi_{n_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\lambda) \right]_M^L = \beta^3 \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}=1}(\beta \vec{p}_\rho) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}=1}(\beta \vec{p}_\lambda) \right]_M^L. \quad (3.17)$$

β wird später als Varitionsparameter zur Anpassung der endlichen Basis verwendet.

Die Parität π der Oszillatoreigenfunktionen ist gegeben durch N , so daß $\pi = (-1)^N = (-1)^{l_\rho+l_\lambda}$. Die $2 \times 2 \times 2$ -Baryonbasis mit Parität $\pi = +1$ enthält also nur Oszillatorfunktionen mit geradem N , die Baryonbasis mit $\pi = -1$ dagegen nur Oszillatorzustände mit ungeradem N . Mit der Definition (3.12) der Impulsraum-Oszillatorbasis¹ bekommen wir im Ortsraum durch Fouriertransformation die entsprechenden Oszillatorbasiszustände

$$\begin{aligned} \langle \vec{\rho}, \vec{\lambda} | \alpha; LM \rangle &\equiv \int \frac{d^3 p_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\lambda}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 e^{i\vec{p}_\rho \cdot \vec{\rho}} e^{i\vec{p}_\lambda \cdot \vec{\lambda}} \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\lambda) \right]_M^L \\ &= (i)^{2n_\rho+l_\rho+2n_\lambda+l_\lambda} \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^\beta(\vec{\rho}) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}) \right]_M^L = (i)^N \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^\beta(\vec{\rho}) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}) \right]_M^L. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die Oszillator-Basiszustände (3.12) bzw. (3.18) besitzen jedoch keine definierte Symmetrie unter Permutationen $\Pi \in S_3$. Die explizite Konstruktion von 3-Teilchen-Oszillatorfunktionen mit definierten Symmetrien $R_L = \mathcal{S}, M_{\mathcal{S}}, M_{\mathcal{A}}$ und \mathcal{A} wird im Anhang D.5 skizziert (siehe auch [21, 31]).

Da die Unterräume $\mathcal{U}(N, L)$ die invarianten Darstellungsräume der Permutationen $\Pi \in S_3$ sind, müssen die Oszillatorfunktionen zu gegebenem N und L und definierter Symmetrie R_L durch Linearkombinationen der Oszillatorzustände (3.12) aus diesem Unterraum gegeben sein:

$$\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda} | \alpha; LM \rangle_{R_L} = (2\pi)^3 \sum_{n_\rho l_\rho n_\lambda l_\lambda} C_{n_\rho l_\rho n_\lambda l_\lambda}^{R_L NL} \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\lambda) \right]_M^L, \quad (3.19)$$

wobei $\alpha = n_1, l_1, n_2, l_2$ mit $2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 = N$. Die Koeffizienten $C_{n_\rho l_\rho n_\lambda l_\lambda}^{R_L NL}$ sind im wesentlichen Brody-Moshinsky-Klammern (siehe Gleichung (D.70)). Die entsprechende Gleichung gilt ebenfalls im Ortsraum mit denselben Koeffizienten $C_{n_\rho l_\rho n_\lambda l_\lambda}^{R_L NL}$ und den Ortsraum-Oszillatorzuständen (3.12).

¹Im Gegensatz zur Konvention im Anhang D.2 lassen wir die Phase $(-i)^N$ in den Impulsfunktionen fort; stattdessen erscheint die Phase $(i)^N$ im Ortsraum!

3.1.6 Die total antisymmetrischen Baryonbasiszustände

Die Spin-, Flavour- und Impuls-Wellenfunktionen mit definierten S_3 -Symmetrien können nun zusammen mit der total antisymmetrischen Colour-Wellenfunktion zu total antisymmetrischen Baryonbasiszuständen zusammengesetzt werden: $R_L \otimes R_S \otimes R_F \otimes \mathcal{A} = \mathcal{A}$. Wegen der Antisymmetrie der Colour-Wellenfunktion muß der restliche Teil der Baryon-Wellenfunktion total symmetrisch sein: $R_L \otimes R_S \otimes R_F = \mathcal{S}$. Daraus folgt, daß die in Abschnitt 3.1.4 konstruierten $SU(6)$ -Spin-Flavour-Wellenfunktionen definierter Symmetrie mit Oszillatorfunktionen derselben S_3 -Symmetrie kombiniert werden müssen: $R_S \otimes R_F = R_L$.

Die total antisymmetrischen $2 \times 2 \times 2$ -Baryonbasiszustände zu vorgegebenen Quantenzahlen J^π , M_J , T, M_T und S^* sind dann gegeben durch eine Linearkombination der Produktzustände:

$$|N, (LS)J^\pi=(-1)^N M_J; TM_T, S^*\rangle_{\mathcal{A}} = \sum_{R_L \otimes R_S \otimes R_F = \mathcal{S}} C_{\alpha LST S^*}^{R_L R_S R_F} [|\alpha, L\rangle_{R_L} \otimes |S\rangle_{R_F}]_{M_J}^J \otimes |TM_T, S^*\rangle_{R_F} \otimes |\mathcal{C}\rangle_{\mathcal{A}}. \quad (3.20)$$

Die Koeffizienten $C_{\alpha LST S^*}^{R_L R_S R_F}$ sind hierbei durch die Gleichungen (3.11) und (3.19) bestimmt.

3.2 Die Formulierung der Salpeter-Gleichung als Matrixgleichung

Zur Formulierung der Salpeter-Gleichung als Matrixgleichung wird die Salpeter-Amplitude

$$\Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*} = \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}^+ + \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}^-$$

mit

$$\begin{aligned} \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}^+ &= \Lambda^{+++} \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*} = T^+ \xi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}^+ \\ \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}^- &= \Lambda^{---} \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*} = T^- \xi_{J^{-\pi}, M_J, T, M_T, S^*}^- \end{aligned}$$

nach einer Basis entwickelt. Seien dazu die nichtrelativistischen $2 \times 2 \times 2$ -Basen $\{\xi_i^{\pm\pi}\}_i$ mit den Quantenzahlen² J, π, M_J, T, M_T, S^* und $\{\xi_i^{-\pi}\}_i$ mit den gleichen Quantenzahlen aber umgekehrter Parität $-\pi$ gegeben, nach denen wir die $2 \times 2 \times 2$ -Amplituden $\xi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}^+$ und $\xi_{J^{-\pi}, M_J, T, M_T, S^*}^-$ entwickeln können:

$$\xi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}^+ = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^+ \xi_i^{\pm\pi}, \quad \xi_{J^{-\pi}, M_J, T, M_T, S^*}^- = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^- \xi_i^{-\pi} \quad (3.21)$$

Durch die Einbettung dieser Basisfunktionen

$$\phi_i^+ \equiv T^+ \xi_i^{\pm\pi}, \quad \phi_i^- \equiv T^- \xi_i^{-\pi} \quad (3.22)$$

erhalten wir die zueinander orthogonalen $4 \times 4 \times 4$ -Basen $\{\phi_i^+\}_i$ und $\{\phi_i^-\}_i$ mit den Quantenzahlen des Baryons. Diese erlauben dann die Entwicklung der positiven und negativen Komponente der Salpeter-Amplitude

$$\begin{aligned} \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}^+ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i^+ \phi_i^+ = T^+ \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^+ \xi_i^{\pm\pi} \right), \\ \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}^- &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i^- \phi_i^- = T^- \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^- \xi_i^{-\pi} \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

²Die Kennzeichnung der $2 \times 2 \times 2$ -Basen $\{\xi_i^{\pm\pi}\}_i$ mit den Quantenzahlen J, M_J, T, M_T, S^* lassen wir der Übersichtlichkeit halber fort; zur Unterscheidung der beiden Basissätze geben wir lediglich ihre verschiedenen Paritäten $\pm\pi$ an.

und damit der gesamten Salpeter-Amplitude

$$\Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^+ \phi_i^+ + \sum_{i=0}^{\infty} a_i^- \phi_i^- . \quad (3.24)$$

Diese Entwicklung wird in die Salpeter-Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*} &= M \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*} \\ \Downarrow \\ \sum_j \mathcal{H} \phi_j^+ a_j^+ + \sum_i \mathcal{H} \phi_i^- a_i^- &= M \sum_j \phi_j^+ a_j^+ + M \sum_i \phi_i^- a_i^- \end{aligned}$$

Skalarmultiplikation von links mit einer Basisamplitude positiver Energie ϕ_k^+ bzw. negativer Energie ϕ_k^- führt wegen der Orthogonalität $\langle \phi_k^+ | \phi_i^- \rangle = \langle \phi_k^- | \phi_j^+ \rangle = 0$ auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_j \langle \phi_k^+ | \mathcal{H} \phi_j^+ \rangle a_j^+ + \sum_i \langle \phi_k^+ | \mathcal{H} \phi_i^- \rangle a_i^- &= M \sum_j \langle \phi_k^+ | \phi_j^+ \rangle a_j^+ \\ \sum_j \langle \phi_k^- | \mathcal{H} \phi_j^+ \rangle a_j^+ + \sum_i \langle \phi_k^- | \mathcal{H} \phi_i^- \rangle a_i^- &= M \sum_i \langle \phi_k^- | \phi_i^- \rangle a_i^- . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Diese Matrix-Gleichungen können wir in kompakter Blockmatrix-Schreibweise darstellen:

$$\begin{pmatrix} H^{++} & H^{+-} \\ H^{-+} & H^{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^+ \\ a^- \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} N^{++} & 0 \\ 0 & N^{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^+ \\ a^- \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

mit

$$H_{kj}^{(\pm)1(\pm)2} \equiv \langle \phi_k^{(\pm)1} | \mathcal{H} \phi_j^{(\pm)2} \rangle = \langle \xi_k^{(\pm)1\pi} | [T^{(\pm)1}]^\dagger \mathcal{H} T^{(\pm)2} \xi_j^{(\pm)2\pi} \rangle \text{ und } N_{kj}^{\pm\pm} \equiv \langle \phi_k^\pm | \phi_j^\pm \rangle = \langle \xi_k^{\pm\pi} | \xi_j^{\pm\pi} \rangle . \quad (3.27)$$

Wählen wir die Basen $\{\xi_i^{+\pi}\}_i$ und $\{\xi_i^{-\pi}\}_i$ als Orthonormalbasen, d.h.

$$N_{kj}^{\pm\pm} = \langle \phi_k^\pm | \phi_j^\pm \rangle = \langle \xi_k^{\pm\pi} | \xi_j^{\pm\pi} \rangle = \delta_{kj} , \quad (3.28)$$

so schreibt sich die Salpeter-Gleichung wie ein gewöhnliches Eigenwertproblem für eine Matrix:

$$\begin{pmatrix} H^{++} & H^{+-} \\ H^{-+} & H^{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^+ \\ a^- \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a^+ \\ a^- \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Die Salpeter-Amplitude für das Baryon mit umgekehrter Parität aber sonst gleichen Quantenzahlen entwickelt man entsprechend:

$$\Phi_{J^{-\pi}, M_J, T, M_T, S^*}^+ = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{a}_i^+ \left(T^+ \xi_i^{-\pi} \right) \text{ und } \Phi_{J^{-\pi}, M_J, T, M_T, S^*}^- = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{a}_i^- \left(T^- \xi_i^{+\pi} \right) . \quad (3.30)$$

Man bekommt analog zu (3.29) die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} H_{-\pi}^{++} & H_{-\pi}^{+-} \\ H_{-\pi}^{-+} & H_{-\pi}^{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}^+ \\ \tilde{a}^- \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tilde{a}^+ \\ \tilde{a}^- \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

mit

$$\left(H_{-\pi}^{(\pm)1(\pm)2} \right)_{kj} = \langle \xi_k^{-(\pm)1\pi} | [T^{(\pm)1}]^\dagger \mathcal{H} T^{(\pm)2} \xi_j^{-(\pm)2\pi} \rangle . \quad (3.32)$$

Mit der Forderung (2.48) aus Abschnitt 2.4.3 an den irreduziblen Wechselwirkungskern V und der daraus folgenden Symmetrie (2.54) für den Salpeter-Hamiltonian \mathcal{H}

$$\left[\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5, V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \right]_- = 0 \Rightarrow \left[\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5, \mathcal{H} \right]_+ = 0, \quad (3.33)$$

erhält man unter Verwendung der leicht nachprüfaren Beziehungen

$$T^\pm = \mp \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 T^\mp \text{ bzw. } (T^\pm)^\dagger = \pm (T^\mp)^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \quad (3.34)$$

für die Matrixblöcke in (3.31):

$$\begin{aligned} \left(H_{-\pi}^{(\pm)_1(\pm)_2} \right)_{kj} &= \langle \xi_k^{-(\pm)_1\pi} | [T^{(\pm)_1}]^\dagger \mathcal{H} T^{(\pm)_2} \xi_j^{-(\pm)_2\pi} \rangle \\ &= (\pm)_1 \langle \xi_k^{-(\pm)_1\pi} | [T^{-(\pm)_1}]^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \mathcal{H} T^{(\pm)_2} \xi_j^{-(\pm)_2\pi} \rangle \\ &= -(\pm)_1 \langle \xi_k^{-(\pm)_1\pi} | [T^{-(\pm)_1}]^\dagger \mathcal{H} \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 T^{(\pm)_2} \xi_j^{-(\pm)_2\pi} \rangle \\ &= -(\pm)_1 (\pm)_2 \langle \xi_k^{-(\pm)_1\pi} | [T^{-(\pm)_1}]^\dagger \mathcal{H} T^{-(\pm)_2} \xi_j^{-(\pm)_2\pi} \rangle \\ &= -(\pm)_1 (\pm)_2 \left(H_{\pi}^{-(\pm)_1 -(\pm)_2} \right)_{kj} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Damit sind die Blockmatrizen in der Matrixgleichung (3.31) für das Baryon mit entgegengesetzter Parität $-\pi$ durch diejenigen für das Baryon mit Parität π in (3.29) bestimmt:

$$\begin{pmatrix} H_{-\pi}^{++} & H_{-\pi}^{+-} \\ H_{-\pi}^{-+} & H_{-\pi}^{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}^+ \\ \tilde{a}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H_{\pi}^{--} & H_{\pi}^{-+} \\ H_{\pi}^{+-} & -H_{\pi}^{++} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}^+ \\ \tilde{a}^- \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tilde{a}^+ \\ \tilde{a}^- \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

und die Matrixgleichungen (3.31) und (3.29) der beiden Paritäten sind äquivalent:

$$\begin{pmatrix} H_{\pi}^{++} & H_{\pi}^{+-} \\ H_{\pi}^{-+} & H_{\pi}^{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tilde{a}^- \\ \tilde{a}^+ \end{pmatrix} = -M \begin{pmatrix} -\tilde{a}^- \\ \tilde{a}^+ \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Ist also (a^+, a^-) der Eigenvektor zum Eigenwert $-M$ für das Baryon mit Parität π , so ist $(\tilde{a}^+, \tilde{a}^-) = (a^-, -a^+)$ der Eigenvektor zum Eigenwert M für das Baryon umgekehrter Parität $-\pi$. Das ist genau das Resultat aus Abschnitt 2.4.3. Die Transformation $\Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*} \rightarrow \Phi_{J^{-\pi}, M_J, T, M_T, S^*} = \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \Phi_{J^\pi, M_J, T, M_T, S^*}$ entspricht in der Basisentwicklung demnach der Transformation der Entwicklungskoeffizienten $(a^+, a^-) \rightarrow (\tilde{a}^+, \tilde{a}^-) = (a^-, -a^+)$. Die Lösung von (3.29) liefert uns somit simultan die Salpeter-Amplituden und Massen der Baryonen beider Paritäten $\pi = \pm 1$.

Für die numerische Lösung der Salpeter-Gleichung muß die Basisentwicklung (3.24) natürlich endlich sein; wir beschränken die Basis durch Vorgabe der Zahl verwendeter Oszillatoranregungen N . Entwicklungen bis zu $N \leq 10$ Oszillatoranregungen konnten von den uns vorhandenen Rechnerkapazitäten bewältigt werden. Gleichung (3.29) wird damit zu einer endlichen reellen, symmetrischen Matrixgleichung, die mit numerischen Standardverfahren gelöst werden kann. Die Lösung in dieser endlichen Basis liefert einen genäherten Eigenwert M_β und eine genäherte Eigenfunktion Φ_β für die Salpeter-Gleichung. Diese Näherungslösungen genügen der exakten Beziehung

$$\langle \Phi_\beta | \mathcal{H} | \Phi_\beta \rangle = M_\beta \langle \Phi_\beta | \Phi_\beta \rangle. \quad (3.38)$$

Der Index β macht hier deutlich, daß die Näherungslösungen Φ_β durch die in den Basiszuständen $\xi_i^{\pm\pi, \beta}$ enthaltenen Oszillatorfunktionen vom Oszillatorparameter β abhängig sind. β stellt in

diesem Zusammenhang einen Variationsparameter mit der Dimension MeV^{-1} dar, der die absolute Skala für die Impulsabhängigkeit der Basisfunktionen gemäß

$$\xi_i^{\pm\pi, \beta}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \beta^3 \xi_i^{\pm\pi, \beta=1}(\beta \vec{p}_\rho, \beta \vec{p}_\lambda) \quad (3.39)$$

festlegt. Die Salpeter-Gleichung kann in Form eines äquivalenten Variationsproblems

$$\delta M[\Phi] = \delta \frac{\langle \Phi | \mathcal{H} \Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} \quad (3.40)$$

formuliert werden, wobei die Variation δ über alle Funktionen $\Phi \neq 0$ mit der Nebenbedingung $(\Lambda^{+++} + \Lambda^{---} - \mathbb{1}) \Phi = 0$ ausgeführt wird. Wenn man analog zu [27] die Zwangsbedingung durch Einführung von Lagrange-Multiplikatoren einbaut, zeigt man leicht, daß in der Tat die stationären Zustände (3.40) von $M[\Phi]$ die Lösungen der Salpeter-Gleichung (2.89) sind. Es ist aber zu beachten, daß die gebundenen Zustände i.a. nicht den Minima von $M[\Phi]$ entsprechen müssen, denn zu jeder Lösung mit positivem Eigenwert M existiert eine Lösung mit dem negativen Eigenwert $-M$, so daß das Spektrum nicht nach unten beschränkt ist!

Entsprechend der Gleichung (3.38) machen wir den Variationsansatz $\Phi = \Phi_\beta$ mit $M[\Phi_\beta] = M_\beta$. Die stationären Punkte von M_β mit $d/d\beta M_\beta = 0$ legen damit für jedes Baryon den Oszillatorparameter β fest.

3.3 Die Berechnung der Matrixelemente

In diesem Abschnitt stellen wir dar, wie die Matrixelemente $H_{kj}^{(\pm)_1(\pm)_2} \equiv \langle \phi_k^{(\pm)_1} | \mathcal{H} | \phi_j^{(\pm)_2} \rangle$ des Salpeter-Hamiltonian \mathcal{H} mit

$$\begin{aligned} (\mathcal{H} \Phi)(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &= \sum_{i=1}^3 H(\vec{p}_i) \Phi(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \\ &+ [\Lambda^{+++}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) + \Lambda^{---}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)] \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \\ &\times \int \frac{d^3 p'_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\lambda}{(2\pi)^3} V(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda, \vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) \Phi(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) \end{aligned} \quad (3.41)$$

konkret zu Matrixelementen bzgl. der nichtrelativistischen $2 \times 2 \times 2$ -Baryonbasiszustände $\xi_i^{\pm\pi}$ reduziert werden, um sie dann mit Hilfe von Drehimpulskopplungsregeln und dem Wigner-Eckart-Theorem berechnen zu können.

Zwecks einer kompakteren Notation definieren wir zunächst die Integraloperation

$$(\hat{V} \Phi)(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \equiv \int \frac{d^3 p'_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\lambda}{(2\pi)^3} V(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda, \vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) \Phi(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda). \quad (3.42)$$

Damit schreibt sich die Operation von \mathcal{H} in der einfachen Form

$$\mathcal{H} \Phi = \sum_{i=1}^3 H(\vec{p}_i) \Phi + (\Lambda^{+++} + \Lambda^{---}) \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} \Phi. \quad (3.43)$$

Benutzen wir nun

$$\begin{aligned} [\phi_k^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger \Lambda^{+++}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &= [\phi_k^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger, \quad [\phi_k^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger \Lambda^{---}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = [\phi_k^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger \\ [\phi_k^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger \Lambda^{+++}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &= 0, \quad [\phi_k^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger \Lambda^{---}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = 0, \\ \sum_{i=1}^3 H(\vec{p}_i) \phi_k^+ &= + \sum_{i=1}^3 \omega(\vec{p}_i) \phi_k^+, \quad \sum_{i=1}^3 H(\vec{p}_i) \phi_k^- = - \sum_{i=1}^3 \omega(\vec{p}_i) \phi_k^-, \end{aligned}$$

wobei $\sum_{i=1}^3 \omega(\vec{p}_i)$ analog zu $\sum_{i=1}^3 H(\vec{p}_i)$ (siehe 2.78) definiert ist durch

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \omega(\vec{p}_i) &= \sum_{i=1}^2 \omega_i(\vec{p}_i) \quad \text{mit} \quad \omega_1(\vec{p}_1) = \sum_{f_1=n,s} \omega(\vec{p}_1; m_{f_1}) [P_{f_1} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}}] , \\ \omega_2(\vec{p}_2) &= \sum_{f_2=n,s} \omega(\vec{p}_2; m_{f_2}) [\mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes P_{f_2} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}}] , \\ \omega_3(\vec{p}_3) &= \sum_{f_3=n,s} \omega(\vec{p}_3; m_{f_3}) [\mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes P_{f_3}] . \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dann erhalten wir explizit für die Matricelemente der vier Blöcke:

$$H_{kj}^{++} = + \sum_{i=1}^3 \langle \phi_k^+ | \omega(\vec{p}_i) \phi_j^+ \rangle + \langle \phi_k^+ | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} \phi_j^+ \rangle \quad (3.45)$$

$$H_{kj}^{+-} = + \langle \phi_k^+ | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} \phi_j^- \rangle \quad (3.46)$$

$$H_{kj}^{-+} = + \langle \phi_k^- | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} \phi_j^+ \rangle \quad (3.47)$$

$$H_{kj}^{--} = - \sum_{i=1}^3 \langle \phi_k^- | \omega(\vec{p}_i) \phi_j^- \rangle + \langle \phi_k^- | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} \phi_j^- \rangle \quad (3.48)$$

Die Matricelemente der kinetischen Energie in den Blöcken H^{+-} und H^{-+} verschwinden. Mit $\phi_j^+ = T^+ \xi_j^{+\pi}$ und $\phi_j^- = T^- \xi_j^{-\pi}$ können wir nun diese Matricelemente durch die Skalarprodukte (2.109) auf den Räumen der $2 \times 2 \times 2$ -Amplituden $\xi_i^{\pm\pi}$ darstellen:

- Matricelemente der kinetischen Energie in den Blöcken H^{++} und H^{--} :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \langle \phi_k^{\pm} | \omega(\vec{p}_i) \phi_j^{\pm} \rangle &= \sum_{i=1}^3 \langle T^{\pm} \xi_k^{\pm\pi} | \omega(\vec{p}_i) T^{\pm} \xi_j^{\pm\pi} \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \xi_k^{\pm\pi} | \omega(\vec{p}_i) \underbrace{[T^{\pm}]^{\dagger} T^{\pm}}_{\mathbf{1}} \xi_j^{\pm\pi} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^3 \langle \xi_k^{\pm\pi} | \omega(\vec{p}_i) \xi_j^{\pm\pi} \rangle \end{aligned} \quad (3.49)$$

- Matricelemente der Wechselwirkung in allen Blöcken H^{++} , H^{+-} , H^{-+} und H^{--} :

$$\begin{aligned} \langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} \phi_j^{(\pm)2} \rangle &= \langle T^{(\pm)1} \xi_k^{(\pm)1\pi} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} [T^{(\pm)2} \xi_j^{(\pm)2\pi}] \rangle \\ &= \langle \xi_k^{(\pm)1\pi} | [T^{(\pm)1}]^{\dagger} \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} [T^{(\pm)2} \xi_j^{(\pm)2\pi}] \rangle \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die $2 \times 2 \times 2$ -Matricelemente der kinetischen Energie haben eine sehr einfache Struktur, da wegen $[T^{\pm}]^{\dagger} T^{\pm} = \mathbf{1}$ die Einbettungsoperation komplett verschwindet. Die Struktur der Matricelemente des auf die $2 \times 2 \times 2$ -Amplituden wirkenden Operators $[T^{(\pm)1}]^{\dagger} \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} T^{(\pm)2}$ ist dagegen im Hinblick auf die numerische Berechnung wesentlich komplizierter. Diese Matricelemente enthalten die Einbettungsoperatoren und neben der 6-fach-Integration des Skalarproduktes ebenfalls noch die 6-fach-Integration der Operation (3.42). Die insgesamt 12-dimensionale Integration kann i.a. nicht separiert werden, da der irreduzible Wechselwirkungskern V i.a. nicht separabel ist.

3.3.1 Die Berechnung der Wechselwirkungsmatrixelemente

Die Struktur der Wechselwirkungsmatrixelemente

Um die numerische Berechnung der Wechselwirkungsmatrixelemente zu vereinfachen gehen wir wie folgt vor:

- Für den Wechselwirkungskern nehmen wir einen **Faltungstypkern** an, d.h.

$$V(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda, \vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) = V(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \quad (3.51)$$

Ein solcher Faltungskern führt im Ortsraum zu einer lokalen Wechselwirkung. Diese Annahme entspricht der 'Leiter-Näherung' des Wechselwirkungskerns, also der störungstheoretischen Näherung des Kerns durch seine niedrigste Ordnung. Wir werden sehen, daß im Fall eines Faltungskerns die Abhängigkeit von den Koordinaten $\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda$ und $\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda$ durch eine Basisentwicklung separiert werden kann, was die numerische Berechnung der Matrixelemente enorm vereinfacht.

- Mit Hilfe der expliziten Darstellung (C.20) von $\sqrt{\sigma(\vec{p})}$ zerlegen wir den Wurzel Ausdruck

$$\frac{\sqrt{\sigma(\vec{p})}}{\sqrt{2\omega(\vec{p}; m)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ f(|\vec{p}|; m_f) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} + g(|\vec{p}|; m_f) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}} \} , \quad (3.52)$$

wobei $\hat{\vec{p}} \equiv \vec{p}/|\vec{p}|$ und f, g definiert sind durch

$$f(|\vec{p}|; m) \equiv \sqrt{\frac{\omega(\vec{p}; m) + m}{2\omega(\vec{p}; m)}} , \quad g(|\vec{p}|; m) \equiv \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{2\omega(\vec{p}; m)(\omega(\vec{p}; m) + m)}} , \quad (3.53)$$

und erhalten damit für die in (2.93) definierten 1-Teilchen-Einbettungsoperatoren: $\tilde{T}^\pm(\vec{p}; m)$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^+(\vec{p}; m) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} f(|\vec{p}|; m) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} + \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} g(|\vec{p}|; m) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}} \right\} \\ \tilde{T}^-(\vec{p}; m) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} f(|\vec{p}|; m) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} - \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} g(|\vec{p}|; m) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}} \right\} . \end{aligned} \quad (3.54)$$

Um in dieser Zerlegung die Einbettungsoperatoren T^\pm darzustellen, definieren wir acht auf dem Spin $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2)$ -Impulsraum wirkende Operatoren \tilde{Q} :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_0(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) &\equiv f(|\vec{p}_1|; m_{f_1}) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes f(|\vec{p}_2|; m_{f_2}) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes f(|\vec{p}_3|; m_{f_3}) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \tilde{Q}_1(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) &\equiv f(|\vec{p}_1|; m_{f_1}) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes g(|\vec{p}_2|; m_{f_2}) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}_2 \otimes g(|\vec{p}_3|; m_{f_3}) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}_3 \\ \tilde{Q}_2(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) &\equiv g(|\vec{p}_1|; m_{f_1}) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}_1 \otimes f(|\vec{p}_2|; m_{f_2}) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes g(|\vec{p}_3|; m_{f_3}) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}_3 \\ \tilde{Q}_3(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) &\equiv g(|\vec{p}_1|; m_{f_1}) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}_1 \otimes g(|\vec{p}_2|; m_{f_2}) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}_2 \otimes f(|\vec{p}_3|; m_{f_3}) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \tilde{Q}_4(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) &\equiv f(|\vec{p}_1|; m_{f_1}) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes f(|\vec{p}_2|; m_{f_2}) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes g(|\vec{p}_3|; m_{f_3}) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}_3 \\ \tilde{Q}_5(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) &\equiv f(|\vec{p}_1|; m_{f_1}) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes g(|\vec{p}_2|; m_{f_2}) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}_2 \otimes f(|\vec{p}_3|; m_{f_3}) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \tilde{Q}_6(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) &\equiv g(|\vec{p}_1|; m_{f_1}) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}_1 \otimes f(|\vec{p}_2|; m_{f_2}) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes f(|\vec{p}_3|; m_{f_3}) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \tilde{Q}_7(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) &\equiv g(|\vec{p}_1|; m_{f_1}) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}_1 \otimes g(|\vec{p}_2|; m_{f_2}) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}_2 \otimes g(|\vec{p}_3|; m_{f_3}) \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}_3 \end{aligned} \quad (3.55)$$

und damit die acht \tilde{Q} -Operatoren auf dem Spin $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2)$ -Impuls-Flavour-Produktraum:

$$\mathcal{Q}_i(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \equiv \sum_{\substack{f_1, f_2, f_3 \\ = n, s}} \tilde{Q}_i(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) \otimes P_{f_1} \otimes P_{f_2} \otimes P_{f_3} . \quad (3.56)$$

Sie stehen über die folgenden acht Einbettungsmatrizen $\mathcal{T}_i : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$ in direktem Zusammenhang mit den Einbettungsoperatoren T^\pm :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0 &\equiv \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \\
\mathcal{T}_1 &\equiv \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \\
\mathcal{T}_2 &\equiv \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \\
\mathcal{T}_3 &\equiv \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \\
\mathcal{T}_4 &\equiv \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \\
\mathcal{T}_5 &\equiv \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \\
\mathcal{T}_6 &\equiv \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \\
\mathcal{T}_7 &\equiv \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Mit diesen Definitionen folgt nämlich für die Einbettungen T^\pm :

$$\begin{aligned}
T^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &= \sum_{i=0}^7 \mathcal{T}_i \mathcal{Q}_i(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \\
T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &= \sum_{i=0}^7 \epsilon_i \mathcal{T}_{7-i} \mathcal{Q}_i(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \quad \text{mit } \epsilon_i \equiv \begin{cases} +1 & \text{für } i = 0, 1, 2, 3 \\ -1 & \text{für } i = 4, 5, 6, 7 \end{cases} .
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Die Impuls- und Flavourabhängigkeit der Einbettungen T^\pm steckt jetzt nur noch in den auf die $2 \times 2 \times 2$ -Amplituden wirkenden Operatoren \mathcal{Q}_i , während die Einbettungsmatrizen \mathcal{T} die Abbildung des $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ -Spin-Raum in den $\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$ besorgen. Die Impulsabhängigkeit in den Operatoren \mathcal{Q}_i ist durch die Funktionen f und g gegeben. Diese sind in Abbildung 3.1 als Funktionen von $|\vec{p}|/m$ dargestellt:

- Im nichtrelativistischen Grenzfall $|\vec{p}|/m \ll 1$ (d.h. für große Massen m) gilt

$$f(|\vec{p}|; m) \approx 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{|\vec{p}|}{m} \right)^2 \approx 1, \quad g(|\vec{p}|; m) \approx \frac{1}{2} \frac{|\vec{p}|}{m} \approx 0. \tag{3.59}$$

Die Einbettungen T^\pm werden durch den \mathcal{Q}_0 -Term in (3.58) dominiert. \mathcal{Q}_0 selbst konvergiert für $|\vec{p}|/m \rightarrow 0$ gegen die Identität: $\mathcal{Q}_0 \rightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}$. Die anderen Operatoren \mathcal{Q}_i , $i \neq 0$, welche g und damit $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ -Terme enthalten, sind unterdrückt. Spin-Bahn-Effekte werden dadurch minimal.

- Im Grenzfall kleiner Massen, d.h. $|\vec{p}|/m \gg 1$, werden f und g gleich groß

$$f(|\vec{p}|; m) \approx g(|\vec{p}|; m) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.60}$$

In den Einbettungsoperatoren T^\pm spielen alle acht Operatoren \mathcal{Q} eine gleich große Rolle. Die durch $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ -Terme hervorgerufenen Spin-Bahn-Effekte werden maximal.

Die Operatoren \mathcal{Q}_i beinhalten somit die relativistischen Effekte in unserem Modell, wie beispielsweise Spin-Bahn-Effekte. Die Konstituentenquarkmassen m als freie Parameter des Modells bestimmen hierbei die Stärke solcher Effekte wie Abbildung 3.1 zeigt. Mit dieser Zerlegung

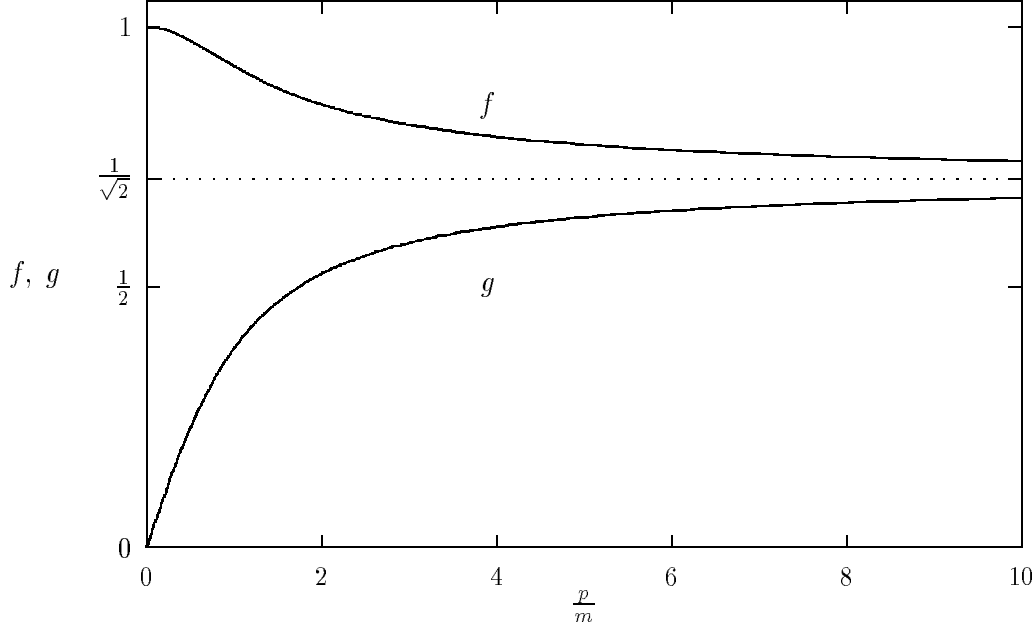


Abbildung 3.1: Die Funktionen f und g in den Einbettungsoperatoren T^\pm als Funktionen des Quotienten p/m ; g beschreibt die Stärke von Spin-Bahn-Effekten.

der Einbettungsoperatoren erhalten wir schließlich für die Matrixelemente (3.50) der Wechselwirkung:

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} \phi_j^{(\pm)2} \rangle &= \langle \xi_k^{(\pm)1\pi} | [T^{(\pm)1}]^\dagger \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} [T^{(\pm)2} \xi_j^{(\pm)2\pi}] \rangle \\
 &= \int \frac{d^3 p_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\lambda}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\lambda}{(2\pi)^3} \\
 &\quad [\xi_k^{(\pm)1\pi}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger [T^{(\pm)1}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 V(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) T^{(\pm)2}(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) \xi_j^{(\pm)2\pi}(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) \\
 &= \sum_{m=0}^7 \sum_{n=0}^7 \int \frac{d^3 p_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\lambda}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\lambda}{(2\pi)^3} \\
 &\quad [\xi_k^{(\pm)1\pi}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger [\mathcal{Q}_m(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger V_{m^{(\pm)1}n^{(\pm)2}}^{(\pm)1(\pm)2}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \mathcal{Q}_n(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) \xi_j^{(\pm)2\pi}(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda)
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

wobei die Potentiale $V_{m^{(\pm)1}n^{(\pm)2}}^{(\pm)1(\pm)2}$ sich folgendermaßen über die Einbettungsmatrizen \mathcal{T}_i aus dem Kern V berechnen:

Mit der Definition

$$V^{m\ n}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \equiv \mathcal{T}_m^\dagger \left[\gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 V(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \right] \mathcal{T}_n \tag{3.62}$$

und $\epsilon_n \equiv \begin{cases} +1 & \text{für } n = 0, 1, 2, 3 \\ -1 & \text{für } n = 4, 5, 6, 7 \end{cases}$
gilt:

$$\begin{aligned} V_{mn}^{++}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) &\equiv V^{m\ n}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \\ V_{mn}^{+-}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) &\equiv \epsilon_n V^{m\ (7-n)}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \\ V_{mn}^{-+}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) &\equiv \epsilon_m V^{(7-m)\ n}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \\ V_{mn}^{--}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) &\equiv \epsilon_n \epsilon_m V^{(7-m)\ (7-n)}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Diese Potentiale aus den vier verschiedenen Blöcken der Matrix H sind voneinander nicht unabhängig : die Bedingung (2.48), welche die physikalische Interpretierbarkeit der negativen Eigenwerte von H gewährleistet, führt zu den Beziehungen (siehe Anhang F.2)

$$V_{mn}^{--} = -V_{mn}^{++} \quad \text{und} \quad V_{mn}^{-+} = V_{mn}^{+-} \quad (3.64)$$

Sei nun $\{\eta_i\}_i$ mit $\eta_i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ ein vollständiges Orthonormalsystem³ bzgl. des Skalarproduktes (2.109), d.h.

$$\langle \eta_k | \eta_j \rangle = \int \frac{d^3 p_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\lambda}{(2\pi)^3} [\eta_k(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger \eta_j(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \delta_{kj} \quad (3.65)$$

$$\sum_j \eta_j(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) [\eta_j(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda)]^\dagger = (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho) \delta^{(3)}(\vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}}. \quad (3.66)$$

Mit Hilfe dieser ON-Basis kann man die Koordinatenabhängigkeit in den Faltungstyp-Potentiale $V_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda)$ separieren, es gilt nämlich

$$\begin{aligned} V_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) &= \\ \sum_r \sum_s \eta_r(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \left[\int d^3 \rho d^3 \lambda [\eta_r(\vec{\rho}, \vec{\lambda})]^\dagger V_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \eta_s(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \right] [\eta_s(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda)]^\dagger. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Dabei sind die Fouriertransformierten definiert durch:

$$V_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \equiv \int \frac{d^3 q_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q_\lambda}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}_\rho \vec{\rho}} e^{i\vec{q}_\lambda \vec{\lambda}} V_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{q}_\rho, \vec{q}_\lambda) \quad (3.68)$$

$$\eta_s(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \equiv \int \frac{d^3 p_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\lambda}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}_\rho \vec{\rho}} e^{i\vec{p}_\lambda \vec{\lambda}} \eta_s(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \quad (3.69)$$

$$[\eta_s(\vec{\rho}, \vec{\lambda})]^\dagger \equiv \int \frac{d^3 p_\rho}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\lambda}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}_\rho \vec{\rho}} e^{-i\vec{p}_\lambda \vec{\lambda}} [\eta_s(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger. \quad (3.70)$$

Setzen wir diese Entwicklung der Faltungstyp-Potentiale in den Ausdruck (3.61) für Matrixelemente der Wechselwirkung ein, dann separiert die 12-dimensionale Integration in zwei 6-dimensionale Integrationen und die Matricelemente berechnen sich über eine Matrixmultiplikation von drei Matrizen:

$$\begin{aligned} &\langle \phi_k^{(\pm)_1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} \phi_j^{(\pm)_2} \rangle \\ &= \sum_{m=0}^7 \sum_{n=0}^7 \left\{ \sum_r \sum_s \langle \xi_k^{(\pm)_1} | \mathcal{Q}_m^\dagger \eta_r \rangle \langle \eta_r | V_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \eta_s \rangle \langle \eta_s | \mathcal{Q}_n \xi_j^{(\pm)_2} \rangle \right\} \end{aligned} \quad (3.71)$$

³Diese Basis wird als Produktbasis durch Tensorierung der Orthonormalbasen des Spinraumes und des Flavourraumes und des ON-Systems der Impulsraum-Wellenfunktionen gebildet.

wobei

$$\langle \eta_r | V_{m^{(\pm)1} n^{(\pm)2}}^{(\pm)}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) | \eta_s \rangle \equiv \int d^3\rho d^3\lambda \left[\eta_r(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \right]^\dagger V_{m^{(\pm)1} n^{(\pm)2}}^{(\pm)}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \eta_s(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \quad (3.72)$$

Somit haben wir durch die Annahme eines Faltungstypkerns und dem technischen Trick des Einschiebens eines vollständigen Satzes $\{\eta_i\}_i$ von Basisfunktionen die Separation der 12-dimensionalen Integration erreicht. Ein Vorteil ist, daß das Potential der Wechselwirkung (beispielsweise das Confinement-Potential) direkt im Ortsraum parametrisiert werden kann. Ein großer Nachteil ist allerdings, daß zur numerischen Berechnung die Entwicklung nach diesen Basiszuständen nach endlicher Zahl abbrechen muß, was eine weitere Näherung darstellt.

Zur weiteren Berechnung der Wechselwirkungsmatrixelemente $\langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} \phi_j^{(\pm)2} \rangle$ haben wir als nächstes die drei in den Summanden $\langle \xi_k^{(\pm)1\pi} | Q_m^\dagger \eta_r \rangle \langle \eta_r | V_{m^{(\pm)1} n^{(\pm)2}}^{(\pm)} \eta_s \rangle \langle \eta_s | Q_n \xi_j^{(\pm)2\pi} \rangle$ der Zerlegung (3.71) vorkommenden Matrizen zu bestimmen. Wegen

$$\langle \xi_k^{\pm\pi} | Q_m^\dagger \eta_r \rangle = \langle \eta_r | Q_m \xi_k^{\pm\pi} \rangle^* \quad (3.73)$$

müssen nur die Matrixelemente $\langle \eta_s | Q_n \xi_j^{\pm\pi} \rangle$ und $\langle \eta_r | V_{m^{(\pm)1} n^{(\pm)2}}^{(\pm)}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \eta_s \rangle$ ausgerechnet werden.

Wir werden im folgenden näher auf die explizite Berechnung dieser Matrixelemente eingehen. Sowohl die (nach Separation des Colouranteils) total symmetrischen Basen $\{\xi_k^{+\pi}\}_k$ und $\{\xi_k^{-\pi}\}_k$, als auch die eingeschobene vollständige Basis $\{\eta_k\}_k$ können als Linearkombination der Produktzustände

$$|\alpha, L; S, S_{12}; JM_J; (t_1, t_2, t_3) T, T_{12}, M_T \rangle \equiv |[\alpha, L] \otimes [S, S_{12}]_M^J \rangle \otimes |(t_1, t_2, t_3) T, T_{12}, M_T \rangle \quad (3.74)$$

der in (3.12), (3.18), (3.6) und (3.8) definierten Oszillator-, Spin- und Flavour-Wellenfunktionen geschrieben werden. Wir berechnen daher die Matrixelemente bzgl. dieser Produktzustände.

Die Matrixelemente der Operatoren Q

Die Operatoren Q_i separieren nach Gleichung (3.56) in den Spin-Impulsanteil $\tilde{Q}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3})$ und den aus den Projektoren bestehenden Flavouranteil $P_{f_1} \otimes P_{f_3} \otimes P_{f_3}$. Folglich separiert das Matrixelement bzgl. der Produktzustände (3.74):

$$\begin{aligned} & \langle \alpha, L; S, S_{12}; JM_J; (t_1, t_2, t_3) T, T_{12}, M_T | Q_i(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) | \alpha', L'; S', S'_{12}; J'M'_J; (t'_1, t'_2, t'_3) T', T'_{12}, M'_T \rangle \\ & \equiv \sum_{\substack{f_1, f_2, f_3 \\ = n, s}} \langle [\alpha, L] \otimes [S, S_{12}]_M^J | \tilde{Q}_i(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) | [\alpha', L'] \otimes [S', S'_{12}]_{M'}^{J'} \rangle \\ & \quad \langle (t_1, t_2, t_3) T, T_{12}, M_T | P_{f_1} \otimes P_{f_3} \otimes P_{f_3} | (t'_1, t'_2, t'_3) T', T'_{12}, M'_T \rangle. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Die Berechnung des Flavourmatrixelementes ist trivial. Die Projektoren P_n und P_s stellen auf dem Isospinraum Tensoroperatoren der Stufe Null dar. Mit dem Wigner-Eckart-Theorem (E.30) erhält man nach einfacher Rechnung:

$$\begin{aligned} & \langle (t_1, t_2, t_3) T, T_{12}, M_T | P_{f_1} \otimes P_{f_3} \otimes P_{f_3} | (t'_1, t'_2, t'_3) T', T'_{12}, M'_T \rangle \\ & = \langle [[\langle t_1 | \otimes \langle t_2 |]^{T_{12}} \otimes \langle t_3 |]_{M_T}^T | P_{f_1} \otimes P_{f_3} \otimes P_{f_3} | [[\langle t'_1 | \otimes \langle t'_2 |]^{T'_{12}} \otimes \langle t'_3 |]_{M'_T}^{T'}] \rangle \\ & = \delta_{TT'} \delta_{M_T M'_T} \delta_{T_{12} T'_{12}} \delta_{t_1 t'_1} \delta_{t_2 t'_2} \delta_{t_3 t'_3} \delta_{t_1 f_1} \delta_{t_2 f_2} \delta_{t_3 f_3} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Das Matrixelement ist diagonal im Isospin T und aufgrund der Kronecker- δ 's $\delta_{t_1 t'_1} \delta_{t_2 t'_2} \delta_{t_3 t'_3}$ ebenfalls in der Strangeness-Quantenzahl S^* . Die zwischengeschobene Produktbasis $\{\eta_i\}_i$ braucht

daher nur Flavourzustände mit dem Isospin T und der Strangeness S^* des Baryons enthalten. Um die Spin-Impuls-Matrixelemente der Operatoren \tilde{Q}_i zu berechnen, schreiben wir die darin vorkommenden Vektoroperatoren $\vec{\sigma}$ auf dem Spinraum und $g(|\vec{p}|; m) \hat{p}$ auf dem Impulsraum zu sphärischen Tensoroperatoren erster Stufe um (siehe Gleichung (E.8)) und interpretieren $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2}$ und $f(|\vec{p}|; m)$ als sphärische Tensoroperatoren der Stufe 0:

$$\begin{aligned} \sigma_0^{[0]} &\equiv \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2} & \hat{\mathbf{P}}_0^{[0]}(\vec{p}; m) &\equiv f(|\vec{p}|; m) \\ \sigma_0^{[1]} &\equiv \sigma_3 & \hat{\mathbf{P}}_0^{[1]}(\vec{p}; m) &\equiv g(|\vec{p}|; m) \hat{p}_z \\ \sigma_{\pm 1}^{[1]} &\equiv \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 \pm i \sigma_2) & \hat{\mathbf{P}}_{\pm 1}^{[1]}(\vec{p}; m) &\equiv \mp g(|\vec{p}|; m) \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{p}_x \pm i \hat{p}_y) \end{aligned} \quad (3.77) \quad (3.78)$$

Hierbei haben wir die Notation $\hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}| = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ benutzt.

Die nach Gleichung (3.55) in den acht Operatoren \tilde{Q}_i vorkommenden Terme $f(|\vec{p}|; m) \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2}$ und $g(|\vec{p}|; m) \vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ schreiben sich dann in der allgemeinen Form:

$$(-\sqrt{3})^k \left[\sigma^{[k]} \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k]}(\vec{p}; m) \right]_0^{[0]} = \begin{cases} f(|\vec{p}|; m) \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2} & \text{für } k = 0 \\ g(|\vec{p}|; m) \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & \text{für } k = 1 \end{cases}, \quad (3.79)$$

so daß wir die Operatoren \tilde{Q}_i durch den folgenden generischen Ausdruck beschreiben können:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{k_1 k_2 k_3}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) &= (-\sqrt{3})^{k_1 + k_2 + k_3} \\ &\times \left[\left[\left[\sigma^{[k_1]} \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(\vec{p}_1; m_{f_1}) \right]_0^{[0]} \otimes \left[\sigma^{[k_2]} \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_2]}(\vec{p}_2; m_{f_2}) \right]_0^{[0]} \right]^{[0]} \otimes \left[\sigma^{[k_3]} \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]}(\vec{p}_3; m_{f_3}) \right]_0^{[0]} \right]_0^{[0]} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Die Zuordnung der Ränge k_1, k_2, k_3 der Tensoroperatoren zum Index i der Operatoren \tilde{Q}_i ist in der folgenden Tabelle gegeben:

Index i von \tilde{Q}_i	0	1	2	3	4	5	6	7
k_1	0	0	1	1	0	0	1	1
k_2	0	1	0	1	0	1	0	1
k_3	0	1	1	0	1	0	0	1

Die Form (3.80) der Operatoren $\tilde{Q}_{k_1 k_2 k_3}$ zeigt insbesondere, daß sie Tensorenoperatoren mit Rang 0 sind: $\tilde{Q}_{k_1 k_2 k_3} = \tilde{Q}_{k_1 k_2 k_3}^{[0]}$.

Unter Verwendung des Wigner-Eckart-Theorems (E.30) stellen wir das Spin-Impulsraum-Matrixelement der Operatoren $\tilde{Q}_{k_1 k_2 k_3}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3})$ durch sein nicht mehr von den M_J -Quantenzahlen abhängiges, reduziertes Matrixelement dar:

$$\begin{aligned} \langle [\langle \alpha, L | \otimes \langle S, S_{12} |]_{M_J}^J | \tilde{Q}_{k_1 k_2 k_3}^{[0]}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) | [\langle \alpha', L' \rangle \otimes \langle S', S'_{12} \rangle]_{M_J'}^{J'} \rangle = \\ \frac{1}{J} \delta_{JJ'} \delta_{M_J M_J'} \langle [\langle \alpha, L | \otimes \langle S, S_{12} |]_{M_J}^J | \tilde{Q}_{k_1 k_2 k_3}^{[0]}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) | [\langle \alpha', L' \rangle \otimes \langle S', S'_{12} \rangle]_{M_J'}^{J'} \rangle. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Der Rang 0 der \tilde{Q}_i führt dazu, daß ihre Matrizen bzgl. des Gesamtdrehimpulses J und seiner 3-Komponente M_J diagonal sind. Insbesondere muß damit die zwischengeschobene Produktbasis

$\{\eta_k\}_k$ nur Zustände mit dem Gesamtdrehimpuls J des Baryons enthalten.

Für die Berechnung des reduzierten Matrixelements fassen wir durch zweifache Umkopplung mit Hilfe der Umkopplungsformel (E.27) die Tensoroperatoren $\sigma^{[k]}$ zu einem Spinraum-Operator und die Tensoroperatoren $\hat{\mathbf{P}}^{[k]}(\vec{p}; m)$ zu einem Impulsraum-Operator zusammen. Die zwei bei dieser Umkopplung auftretenden 9j-Symbole sind aufgrund ihrer 0-Einträge nach Gleichung (E.29) elementar berechenbar und wir erhalten das Resultat

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{k_1 k_2 k_3}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) = \\ (-1)^{k_1+k_2+k_3} \sum_{\substack{k_{12} \\ k_{123}}} \hat{k}_{123} \left[\left[\left[\sigma^{[k_1]} \otimes \sigma^{[k_2]} \right]^{[k_{12}]} \otimes \sigma^{[k_3]} \right]^{[k_{123}]} \right. \\ \left. \otimes \left[\left[\hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(\vec{p}_1; m_{f_1}) \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_2]}(\vec{p}_2; m_{f_2}) \right]^{[k_{12}]} \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]}(\vec{p}_3; m_{f_3}) \right]^{[k_{123}]} \right] \begin{matrix} [0] \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.82)$$

mit $\hat{k}_{123} \equiv \sqrt{2k_{123} + 1}$.

Die Summationsindizes k_{12} und k_{123} genügen dabei den Dreiecksungleichungen

$$|k_1 - k_2| \leq k_{12} \leq k_1 + k_2, \quad |k_{12} - k_3| \leq k_{123} \leq k_{12} + k_3. \quad (3.83)$$

Die Operatoren

$\left[\left[\sigma^{[k_1]} \otimes \sigma^{[k_2]} \right]^{[k_{12}]} \otimes \sigma^{[k_3]} \right]^{[k_{123}]}$ und $\left[\left[\hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(\vec{p}_1; m_{f_1}) \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_2]}(\vec{p}_2; m_{f_2}) \right]^{[k_{12}]} \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]}(\vec{p}_3; m_{f_3}) \right]^{[k_{123}]}$ wirken auf verschiedenen Räumen, nämlich auf dem Spin- und auf dem (Dreh-)Impulsraum, so daß nach Gleichung (E.32) das gesamte reduzierte Matrixelement in (3.81) in ein Spinraum- und ein Impulsraum-Matrixelement faktorisiert:

$$\begin{aligned} & \langle [\langle \alpha, L | \otimes \langle S, S_{12} |]_{M_J}^J \tilde{Q}_{k_1 k_2 k_3}^{[0]}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda; m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) | [\langle \alpha', L' \rangle \otimes \langle S', S'_{12} \rangle]_{M'_J}^{J'} \rangle \\ &= (-1)^{k_1+k_2+k_3} \delta_{JJ'} \delta_{M_J M'_J} \\ & \sum_{\substack{k_{12} \\ k_{123}}} (-1)^{k_{123}+S+J+L'} \left\{ \begin{matrix} L & S & J \\ S' & L' & k_{123} \end{matrix} \right\} \\ & \langle S, S_{12} | \left[\left[\sigma^{[k_1]} \otimes \sigma^{[k_2]} \right]^{[k_{12}]} \otimes \sigma^{[k_3]} \right]^{[k_{123}]} | S', S'_{12} \rangle \\ & \langle \alpha, L | \left[\left[\hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(\vec{p}_1; m_{f_1}) \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_2]}(\vec{p}_2; m_{f_2}) \right]^{[k_{12}]} \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]}(\vec{p}_3; m_{f_3}) \right]^{[k_{123}]} | \alpha', L' \rangle. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Entsprechend kann durch zweifache Anwendung derselben Gleichung (E.32) das reduzierte Spin-Matrixelement berechnet werden, da die drei gekoppelten Operatoren $\sigma^{[k_i]}$ jeweils auf die verschiedenen 1-Teilchen-Spinräume wirken. Eine triviale Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} & \langle S, S_{12} | \left[\left[\sigma^{[k_1]} \otimes \sigma^{[k_2]} \right]^{[k_{12}]} \otimes \sigma^{[k_3]} \right]^{[k_{123}]} | S', S'_{12} \rangle \\ &= \hat{k}_{123} \hat{k}_{12} \hat{S} \hat{S}_{12} \hat{S}' \hat{S}'_{12} \left\{ \begin{matrix} S_{12} & \frac{1}{2} & S \\ S'_{12} & \frac{1}{2} & S' \\ k_{12} & k_3 & k_{123} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S'_{12} \\ k_1 & k_2 & k_{12} \end{matrix} \right\} \\ & \langle \frac{1}{2} | \sigma^{[k_1]} | \frac{1}{2} \rangle \langle \frac{1}{2} | \sigma^{[k_2]} | \frac{1}{2} \rangle \langle \frac{1}{2} | \sigma^{[k_3]} | \frac{1}{2} \rangle \end{aligned} \quad (3.85)$$

mit

$$\langle \frac{1}{2} || \sigma^{[0]} || \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \langle \frac{1}{2} || \sigma^{[1]} || \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{6}. \quad (3.86)$$

Im Impulsraum-Matrixelement wirken die einzelnen Operatoren $\hat{\mathbf{P}}^{[k_i]}(\vec{p}_i; m_{f_i})$ auf demselben Raum, nämlich auf den gekoppelten Oszillatorzuständen. Die Zerlegung des reduzierten Impulsraum-Matrixelementes in reduzierte 1-Teilchen-Matrixelemente geschieht in diesem Fall nach Gleichung (E.33) durch das Einschieben eines vollständigen Satzes von Zwischenzuständen, hier also von Oszillatorzuständen.

Die zweimalige Anwendung von (E.33) liefert das Resultat

$$\begin{aligned} & \langle \alpha, L || \left[\left[\hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(\vec{p}_1; m_{f_1}) \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_2]}(\vec{p}_2; m_{f_2}) \right]^{[k_{12}]} \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]}(\vec{p}_3; m_{f_3}) \right]^{[k_{123}]} || \alpha', L' \rangle \\ &= \hat{k}_{12} \hat{k}_{123} (-1)^{k_{123}+k_{12}+L'} \sum_{L'', \alpha''} \sum_{L''', \alpha'''} (-1)^{L'} \left\{ \begin{matrix} L'' & L & k_{12} \\ k_1 & k_2 & L''' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L' & L & k_{123} \\ k_{12} & k_3 & L'' \end{matrix} \right\} \\ & \quad \langle \alpha, L || \hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(\vec{p}_1; m_{f_1}) || \alpha''', L''' \rangle \langle \alpha''', L''' || \hat{\mathbf{P}}^{[k_2]}(\vec{p}_2; m_{f_2}) || \alpha'', L'' \rangle \langle \alpha'', L'' || \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]}(\vec{p}_3; m_{f_3}) || \alpha', L' \rangle. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Die numerische Berechnung des irreduziblen Impulsraum-Matrixelementes in dieser Weise ist natürlich wieder nur näherungsweise möglich, da in der Praxis nur ein endlicher Satz von Basiszuständen verwendet werden kann! Ein alternativer Weg zur Berechnung dieses 3-Teilchen-Impulsraumelementes, der nicht über den Weg der 1-Teilchen-Matrixelemente führt, besteht darin, die sechsdimensionale Integration direkt auszuführen:

Man entwickelt dazu den Integranden in der Variablen $x \equiv \vec{p}_\rho \cdot \vec{p}_\lambda$ nach Legendre-Polynomen, so daß die gesamte Winkelintegration über \hat{p}_ρ und \hat{p}_λ analytisch ausgeführt werden kann. Für vorgegebenes L und L' ist diese Entwicklung endlich. Die Entwicklungskoeffizienten werden über numerische Integration bestimmt. Schließlich muß dann nur noch eine zweidimensionale numerische Integration über $|\vec{p}_\rho|$ und $|\vec{p}_\lambda|$ ausgeführt werden. Es stellte sich aber heraus, daß diese Methode numerisch (vor allem zeitlich) wesentlich aufwendiger ist, als der Weg über die 1-Teilchen-Matrixelemente, wo letztendlich nur eindimensionale Integrationen ausgeführt werden müssen, wie wir im folgenden sehen werden. Diese alternative Methode, die das reduzierte Impulsraum-Matrixelement im Rahmen der numerischen Genauigkeit exakt bestimmt, stellt aber eine Möglichkeit dar, die Konvergenz und Genauigkeit des Einschlebens einer endlichen Zahl von Zwischenzuständen in (3.87) zu kontrollieren [36]. Es zeigt sich, daß mit einer angemessen großen Oszillatorbasis die in dieser Arbeit nach (3.87) berechneten reduzierten Impulsraum-Matrixelemente im Promillebereich von den exakten Werten abweichen.

Berechnung des reduzierten Impulsraummatrixelements für das 3. Teilchen

In dem von uns gewählten Satz von Jacobi-Koordinaten ist der Impuls des 3. Teilchens \vec{p}_3 ausgezeichnet, da er nur von dem Relativimpuls \vec{p}_λ abhängig ist: $\vec{p}_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{p}_\lambda$. Die Berechnung von $\langle \alpha'', L'' || \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]}(\vec{p}_3; m_{f_3}) || \alpha', L' \rangle$ ist daher am einfachsten:

$$\begin{aligned} & \langle \alpha, L || \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]}(\vec{p}_3; m_{f_3}) || \alpha', L' \rangle \\ &= \langle [l_\rho; n_\rho] \otimes [l_\lambda; n_\lambda] || \mathbf{1}_{\vec{p}_\rho}^{[0]} \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]}(-\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{p}_\lambda; m_{f_3}) || [l'_\rho; n'_\rho] \otimes [l'_\lambda; n'_\lambda] \rangle^L \\ &= \hat{k}_3 \hat{L} \hat{L}' \left\{ \begin{matrix} l_\rho & l_\lambda & L \\ l'_\rho & l'_\lambda & L' \\ 0 & k_3 & k_3 \end{matrix} \right\} \langle l_\rho; n_\rho || \mathbf{1}_{\vec{p}_\rho}^{[0]} || l'_\rho; n'_\rho \rangle \langle l_\lambda; n_\lambda || \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]}(-\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{p}_\lambda; m_{f_3}) || l'_\lambda; n'_\lambda \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{L+l_\rho+l'_\lambda+k_3} \frac{\hat{L} \hat{L}'}{\hat{l}_\rho} \delta_{l_\rho l'_\rho} \left\{ \begin{array}{ccc} l_\lambda & L & l_\rho \\ L' & l'_\lambda & k_3 \end{array} \right\} \\
&\quad \langle l_\rho; n_\rho | \mathbf{1}_{\vec{p}_\rho}^{[0]} | l_\rho; n'_\rho \rangle \langle l_\lambda; n_\lambda | \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]} (-\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{p}_\lambda; m_{f_3}) | l'_\lambda; n'_\lambda \rangle.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Hier haben wir im ersten Schritt nach Gleichung (E.33) das gesamte reduzierte Matricelement in die zwei Anteile $\langle l_\rho; n_\rho | \mathbf{1}_{\vec{p}_\rho}^{[0]} | l_\rho; n'_\rho \rangle$ und $\langle l_\lambda; n_\lambda | \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]} (-\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{p}_\lambda; m_{f_3}) | l'_\lambda; n'_\lambda \rangle$ zerlegt. Das ist nur für das Matricelement von Teilchen 3 möglich, da nur in diesem Fall der Tensoroperator $\hat{\mathbf{P}}^{[k_3]}$ ausschließlich auf den Raum der Zustände $|l_\lambda; n_\lambda\rangle$ wirkt. Im nächsten Schritt haben wir das 9j-Symbol nach Gleichung (E.28) zu einem 6j-Symbol vereinfacht. Man zeigt weiter:

$$\langle l_\rho; n_\rho | \mathbf{1}_{\vec{p}_\rho}^{[0]} | l_\rho; n'_\rho \rangle = \hat{l}_\rho \langle l_\rho \ m_\rho; n_\rho | l_\rho \ m_\rho; n'_\rho \rangle = \hat{l}_\rho \int_0^\infty dp_\rho \ p_\rho^2 \ R_{n_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(p_\rho) \ R_{n'_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(p_\rho) = \hat{l}_\rho \ \delta_{n_\rho n'_\rho} \tag{3.89}$$

nach Gleichung (D.21), so daß

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha, L | \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]} (\vec{p}_3; m_{f_3}) | \alpha', L' \rangle \\
&= \langle [l_\rho; n_\rho] \otimes [l_\lambda; n_\lambda] | \mathbf{1}_{\vec{p}_\rho}^{[0]} \otimes \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]} (-\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{p}_\lambda; m_{f_3}) | [l'_\rho; n'_\rho] \otimes [l'_\lambda; n'_\lambda] \rangle^L \\
&= (-1)^{L+l_\rho+l'_\lambda+k_3} \hat{L} \hat{L}' \delta_{l_\rho l'_\rho} \delta_{n_\rho n'_\rho} \left\{ \begin{array}{ccc} l_\lambda & L & l_\rho \\ L' & l'_\lambda & k_3 \end{array} \right\} \langle l_\lambda; n_\lambda | \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]} (-\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{p}_\lambda; m_{f_3}) | l'_\lambda; n'_\lambda \rangle.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Für die Berechnung von $\langle l_\lambda; n_\lambda | \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]} (-\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{p}_\lambda; m_{f_3}) | l'_\lambda; n'_\lambda \rangle$ machen wir eine Fallunterscheidung:

- **$k_3 = 0$:**

Mit $\hat{\mathbf{P}}^{[0]} (-\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{p}_\lambda; m_{f_3}) = f(\sqrt{\frac{2}{3}} |\vec{p}_\lambda|; m_{f_3})$ haben wir dann:

$$\begin{aligned}
\langle l_\lambda; n_\lambda | \hat{\mathbf{P}}^{[0]} (-\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{p}_\lambda; m_{f_3}) | l'_\lambda; n'_\lambda \rangle &= \langle l_\lambda; n_\lambda | f(\sqrt{\frac{2}{3}} |\vec{p}_\lambda|; m_{f_3}) | l'_\lambda; n'_\lambda \rangle \\
&= \hat{l}_\lambda \delta_{l_\lambda l'_\lambda} \int_0^\infty dp_\lambda \ p_\lambda^2 \ R_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(p_\lambda) \ R_{n'_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(p_\lambda) \ f(\sqrt{\frac{2}{3}} p_\lambda; m_{f_3}).
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Außerdem vereinfacht sich im Fall $k_3 = 0$ nach Gleichung (E.26) das 6j-Symbol:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} l_\lambda & L & l_\rho \\ L' & l'_\lambda & 0 \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{l_\lambda+L+l_\rho}}{\hat{L} \hat{l}_\lambda} \delta_{l_\lambda l'_\lambda} \delta_{LL'} \tag{3.92}$$

- **$k_3 = 1$:**

Mit Hilfe von Gleichung (E.10) stellen wir $\hat{\mathbf{P}}_q^{[1]}$ durch die Kugelflächenfunktion Y_{1q} dar:

$$\hat{\mathbf{P}}_q^{[1]} (-\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{p}_\lambda; m_{f_3}) = -g(\sqrt{\frac{2}{3}} |\vec{p}_\lambda|; m_{f_3}) \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1q}(\hat{p}_\lambda). \tag{3.93}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\langle l_\lambda; n_\lambda | \hat{\mathbf{P}}^{[1]} (-\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{p}_\lambda; m_{f_3}) | l'_\lambda; n'_\lambda \rangle &= -\langle l_\lambda; n_\lambda | g(\sqrt{\frac{2}{3}} |\vec{p}_\lambda|; m_{f_3}) \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1q}(\hat{p}_\lambda) | l'_\lambda; n'_\lambda \rangle \\
&= -\langle l_\lambda | Y_{1q}(\hat{p}_\lambda) | l'_\lambda \rangle \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^\infty dp_\lambda \ p_\lambda^2 \ R_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(p_\lambda) \ R_{n'_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(p_\lambda) \ g(\sqrt{\frac{2}{3}} p_\lambda; m_{f_3}) \\
&= (-1)^{l'_\lambda} \hat{l}_\lambda \hat{l}'_\lambda \left(\begin{array}{ccc} l_\lambda & l'_\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \int_0^\infty dp_\lambda \ p_\lambda^2 \ R_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(p_\lambda) \ R_{n'_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(p_\lambda) \ g(\sqrt{\frac{2}{3}} p_\lambda; m_{f_3}),
\end{aligned} \tag{3.94}$$

wobei wir im letzten Schritt für das reduzierte Matrixelement $\langle l_\lambda || Y_1(\hat{p}_\lambda) || l'_\lambda \rangle$ Gleichung (E.36) benutzt haben:

$$\langle l_\lambda || Y_1(\hat{p}_\lambda) || l'_\lambda \rangle = (-1)^{l'_\lambda+1} \hat{l}_\lambda \hat{l}'_\lambda \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_\lambda & l'_\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

Wir setzen diese Resultate für $\langle l_\lambda; n_\lambda || \hat{\mathbf{P}}^{[k_3]}(-\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_\lambda; m_{f_3}) || l'_\lambda; n'_\lambda \rangle$ in (3.90) ein und erhalten das Endresultat für das reduzierte Impulsraum-Matrixelement von Teilchen 3:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, L || \hat{\mathbf{P}}^{[0]}(\vec{p}_3; m_{f_3}) || \alpha', L' \rangle &= \hat{L} \delta_{LL'} \delta_{l_\lambda l'_\lambda} \delta_{l_\rho l'_\rho} \delta_{n_\rho n'_\rho} \\ &\times \int_0^\infty dp_\lambda p_\lambda^2 R_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(p_\lambda) R_{n'_\lambda l'_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(p_\lambda) f\left(\sqrt{\frac{2}{3}} p_\lambda; m_{f_3}\right) \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha, L || \hat{\mathbf{P}}^{[1]}(\vec{p}_3; m_{f_3}) || \alpha', L' \rangle &= (-1)^{L+l_\rho+1} \hat{L} \hat{L}' \hat{l}_\lambda \hat{l}'_\lambda \delta_{l_\rho l'_\rho} \delta_{n_\rho n'_\rho} \begin{Bmatrix} l_\lambda & L & l_\rho \\ L' & l'_\lambda & k_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l_\lambda & l'_\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\times \int_0^\infty dp_\lambda p_\lambda^2 R_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(p_\lambda) R_{n'_\lambda l'_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(p_\lambda) g\left(\sqrt{\frac{2}{3}} p_\lambda; m_{f_3}\right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Zur Berechnung des reduzierten Impulsraum-Matrixelementes für Teilchen 3 ist also im wesentlichen nur noch eine eindimensionale numerische Integration der in (3.53) definierten Funktionen f und g notwendig!

Berechnung der reduzierten Impulsraummatrixelemente der Teilchen 1 und 2

Die Berechnung der reduzierten Impulsraummatrixelemente der Teilchen 1 und 2 ist in der Weise, wie wir es für das 3. Teilchen getan haben, nicht mehr möglich. Die Tensoroperatoren $\hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(\vec{p}_1; m_{f_1})$ und $\hat{\mathbf{P}}^{[k_2]}(\vec{p}_2; m_{f_2})$ sind nämlich wegen $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_\rho + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{p}_\lambda$ und $\vec{p}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_\rho + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{p}_\lambda$ von beiden Relativimpulsen \vec{p}_ρ und \vec{p}_λ abhängig. Wir können aber jeweils durch Wahl eines neuen Satzes von Relativimpulsen $(\vec{p}_{\rho_1}, \vec{p}_{\lambda_1})$ für Teilchen 1 bzw. $(\vec{p}_{\rho_2}, \vec{p}_{\lambda_2})$ für Teilchen 2 erreichen, daß in diesen Sätzen \vec{p}_1 nur von der Relativkoordinate \vec{p}_{λ_1} , bzw. \vec{p}_2 nur von der Relativkoordinate \vec{p}_{λ_2} abhängig ist. Diese neuen Koordinatensätze erhalten wir durch die sogenannten orthogonalen **Talmi-Transformationen** des bisherigen Satzes $(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)$ (vergleiche Anhang D.4):

- Ausgezeichneter Koordinatensatz für Teilchen 1 (vergl. (D.55) und (D.58)):

$$\begin{pmatrix} \vec{p}_{\rho_1} \\ \vec{p}_{\lambda_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}_\rho \\ \vec{p}_\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p}_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_{\lambda_1} \quad (3.98)$$

- Ausgezeichneter Koordinatensatz für Teilchen 2 (vergl. (D.57) und (D.59)):

$$\begin{pmatrix} \vec{p}_{\rho_2} \\ \vec{p}_{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}_\rho \\ \vec{p}_\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p}_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_{\lambda_2} \quad (3.99)$$

Auf der Oszillatorbasis stellen sich diese Koordinaten-Transformationen in Form der **Talmi-Moshinsky-Transformationen** (D.62) und (D.63) auf den durch N und L gegebenen endlichdimensionalen, invarianten Unterräumen (gleicher Energie) dar (siehe Anhang D.4).

Das reduzierte Impulsraum-Matrixelement für Teilchen 1 schreibt sich nach dem Wigner-Eckart-Theorem:

$$\begin{aligned}
& \langle \alpha, L || \hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(\vec{p}_1; m_{f_1}) || \alpha', L' \rangle \\
&= \langle [l_\rho; n_\rho] \otimes [l_\lambda; n_\lambda] || \hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_\rho + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{p}_\lambda; m_{f_1}) || [l'_\rho; n'_\rho] \otimes [l'_\lambda; n'_\lambda] \rangle^L \\
&= (-1)^{L-M} \begin{pmatrix} L & k_1 & L' \\ -M & q & M' \end{pmatrix}^{-1} \int d^3p_\rho d^3p_\lambda \\
&\quad \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\lambda) \right]_M^L \hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_\rho + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{p}_\lambda; m_{f_1}) \left[\phi_{n'_\rho l'_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho) \otimes \phi_{n'_\lambda l'_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\lambda) \right]_{M'}^{L'} \\
&= \sum_{\substack{n_{\rho_1} l_{\rho_1} \\ n_{\lambda_1} l_{\lambda_1}}} \sum_{\substack{n'_{\rho_1} l'_{\rho_1} \\ n'_{\lambda_1} l'_{\lambda_1}}} \langle n_{\rho_1} l_{\rho_1}, n_{\lambda_1} l_{\lambda_1}; L | n_\rho l_\rho, n_\lambda l_\lambda; L \rangle_3 \langle n'_{\rho_1} l'_{\rho_1}, n'_{\lambda_1} l'_{\lambda_1}; L' | n'_\rho l'_\rho, n'_\lambda l'_\lambda; L' \rangle_3 \\
&\quad (-1)^{l_\rho + l_\lambda + l'_\rho + l'_\lambda} (-1)^{L-M} \begin{pmatrix} L & k_1 & L' \\ -M & q & M' \end{pmatrix}^{-1} \int d^3p_{\rho_1} d^3p_{\lambda_1} \\
&\quad \left[\phi_{n_{\rho_1} l_{\rho_1}}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_{\rho_1}) \otimes \phi_{n_{\lambda_1} l_{\lambda_1}}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_{\lambda_1}) \right]_M^L \hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(-\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_{\lambda_1}; m_{f_1}) \left[\phi_{n'_{\rho_1} l'_{\rho_1}}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_{\rho_1}) \otimes \phi_{n'_{\lambda_1} l'_{\lambda_1}}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_{\lambda_1}) \right]_{M'}^{L'} \\
&\hspace{15cm} (3.100)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Integrationsvariablen \vec{p}_ρ und \vec{p}_λ durch den neuen Koordinatensatz $(\vec{p}_{\rho_1}, \vec{p}_{\lambda_1})$ gemäß der Talmi-Transformation (3.98) substituiert und auf der Oszillatorbasis diesen Koordinatenwechsel durch die Talmi-Moshinsky-Transformation (D.62) dargestellt. Nun ist

$$\begin{aligned}
& (-1)^{L-M} \begin{pmatrix} L & k_1 & L' \\ -M & q & M' \end{pmatrix}^{-1} \\
& \int d^3p_\rho d^3p_\lambda \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\lambda) \right]_M^L \hat{\mathbf{P}}^{[k]}(-\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_\lambda; m_f) \left[\phi_{n'_\rho l'_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho) \otimes \phi_{n'_\lambda l'_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\lambda) \right]_{M'}^{L'} \\
&\hspace{15cm} (3.101)
\end{aligned}$$

der vollausgeschriebene Ausdruck für das reduzierte Matrixelement $\langle \alpha, L || \hat{\mathbf{P}}^{[k]}(\vec{p}_3; m_f) || \alpha', L' \rangle$ von Teilchen 3 (mit Rang k und Masse m_f), das wir mit Hilfe der Gleichungen (3.96) und (3.97) berechnen können. Wir bekommen demnach das reduzierte Impulsraummatrixelement für das erste Teilchen durch eine Talmi-Moshinsky-Transformation des entsprechenden Matrixelementes für Teilchen 3, d.h.

$$\begin{aligned}
& \langle \alpha, L || \hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(\vec{p}_1; m_{f_1}) || \alpha', L' \rangle = \\
& (-1)^{l_\rho + l_\lambda + l'_\rho + l'_\lambda} \sum_{\substack{n_{\rho_1} l_{\rho_1} \\ n_{\lambda_1} l_{\lambda_1}}} \sum_{\substack{n'_{\rho_1} l'_{\rho_1} \\ n'_{\lambda_1} l'_{\lambda_1}}} \langle n_{\rho_1} l_{\rho_1}, n_{\lambda_1} l_{\lambda_1}; L | n_\rho l_\rho, n_\lambda l_\lambda; L \rangle_3 \langle n'_{\rho_1} l'_{\rho_1}, n'_{\lambda_1} l'_{\lambda_1}; L' | n'_\rho l'_\rho, n'_\lambda l'_\lambda; L' \rangle_3 \\
& \quad \times \langle \alpha_1, L || \hat{\mathbf{P}}^{[k_1]}(\vec{p}_3; m_{f_1}) || \alpha'_1, L' \rangle, \\
&\hspace{15cm} (3.102)
\end{aligned}$$

wobei $\alpha_1 \equiv (n_{\rho_1}, l_{\rho_1}, n_{\lambda_1}, l_{\lambda_1})$ und $\alpha'_1 \equiv (n'_{\rho_1}, l'_{\rho_1}, n'_{\lambda_1}, l'_{\lambda_1})$. In analoger Weise zeigt man durch die Talmi-Transformation (3.99) $(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \rightarrow (\vec{p}_{\rho_2}, \vec{p}_{\lambda_2})$ und die zugehörige Talmi-Moshinsky-Transformation (D.63) der Oszillatorzustände, daß man die irreduziblen Matrixelemente für Teilchen 2 ebenfalls durch eine Talmi-Moshinsky-Transformation der Teilchen-3-Matrixelemente

$\langle \alpha_2, L | | \hat{\mathbf{P}}^{[k_2]}(\vec{p}_3; m_{f_2}) | | \alpha'_2, L' \rangle$ bekommt:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, L | | \hat{\mathbf{P}}^{[k_2]}(\vec{p}_2; m_{f_2}) | | \alpha', L' \rangle = \\ (-1)^{l_\rho + l'_\rho} \sum_{\substack{n_{\rho_2} l_{\rho_2} \\ n_{\lambda_2} l_{\lambda_2}}} \sum_{\substack{n'_{\rho_2} l'_{\rho_2} \\ n'_{\lambda_2} l'_{\lambda_2}}} \langle n_{\rho_2} l_{\rho_2}, n_{\lambda_2} l_{\lambda_2}; L | n_\rho l_\rho, n_\lambda l_\lambda; L \rangle_3 \langle n'_{\rho_2} l'_{\rho_2}, n'_{\lambda_2} l'_{\lambda_2}; L' | n'_\rho l'_\rho, n'_\lambda l'_\lambda; L' \rangle_3 \\ \times (-1)^{l_\lambda + l'_\lambda} \langle \alpha_2, L | | \hat{\mathbf{P}}^{[k_2]}(\vec{p}_3; m_{f_2}) | | \alpha'_2, L' \rangle, \end{aligned} \quad (3.103)$$

mit $\alpha_2 \equiv (n_{\rho_2}, l_{\rho_2}, n_{\lambda_2}, l_{\lambda_2})$ und $\alpha'_2 \equiv (n'_{\rho_2}, l'_{\rho_2}, n'_{\lambda_2}, l'_{\lambda_2})$.

Die Matricelemente der Potentiale $V^{(\pm)_1(\pm)_2}_{m \ n}$

Zur expliziten Berechnung der Matricelemente $\langle \eta_r | V^{(\pm)_1(\pm)_2}_{m \ n}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \eta_s \rangle$ sei der Wechselwirkungskern im Impulsraum durch Summanden der folgenden Form gegeben:

$$V(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) = v(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3] \otimes V_{\mathcal{F}} \quad (3.104)$$

mit

- $v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein reelles, skalares, d.h. rotationsinvariantes Potential, welches implizit eine Funktion nur der drehinvarianten Koordinaten $|\vec{p}_\rho|^2$, $|\vec{p}_\lambda|^2$ und $\vec{p}_\rho \cdot \vec{p}_\lambda$ sein soll:

$$v(\vec{q}_\rho, \vec{q}_\lambda)^* = v(\vec{q}_\rho, \vec{q}_\lambda), \quad v(\vec{q}_\rho, \vec{q}_\lambda) = v(|\vec{q}_\rho|^2, |\vec{q}_\lambda|^2, \vec{q}_\rho \cdot \vec{q}_\lambda). \quad (3.105)$$

Insbesondere ist v dann auch gerade:

$$v(-\vec{q}_\rho, -\vec{q}_\lambda) = v(\vec{q}_\rho, \vec{q}_\lambda). \quad (3.106)$$

- $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3 : \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$ die Spinstruktur (Dirac-Struktur) der Wechselwirkung.
- $V_{\mathcal{F}}$ ein Operator, der die Flavourabhängigkeit der Wechselwirkung beschreibt.

Mit Spinstrukturen, die den Bedingungen

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3, \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0]_- = 0, \quad [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3, \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5]_- = 0 \quad (3.107)$$

genügen, entsprechen dann die Wechselwirkungskerne der Form (3.104) den Forderungen (2.48) und (2.36), die aus der Paritätsinvarianz und der geforderten Symmetrie bzgl. positiver und negativer Massen folgten. Im Anhang F.1 sind mögliche Spinstrukturen aus Kombinationen von 4×4 -Matrizen der vier Typen

$$\Gamma_i = \underbrace{\begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_i \end{pmatrix}}_{\text{Typ 1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & A_i \\ A_i & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Typ 2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & A_i \\ -A_i & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Typ 3}} \text{ oder } \underbrace{\begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & -A_i \end{pmatrix}}_{\text{Typ 4}} \quad (3.108)$$

diskutiert, die diese Bedingungen erfüllen:

- Typ I: Γ_1, Γ_2 und Γ_3 sind vom Typ 1
Beispiel: $\mathbf{1}_{C^4} \otimes \mathbf{1}_{C^4} \otimes \mathbf{1}_{C^4}$
- Typ II: Zwei der Γ_i sind vom Typ 2 und eines vom Typ 1
Beispiel: $\gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \mathbf{1}_{C^4} + \text{zykl. Permutationen}$.

- Typ III: Zwei der Γ_i sind vom Typ 3 und eines vom Typ 1
Beispiel: $\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \mathbb{1}_{C^4} + \text{zykl. Permutationen.}$
- Typ IV: Zwei der Γ_i sind vom Typ 4 und eines vom Typ 1
Beispiel: $\gamma^5 \otimes \gamma^5 \otimes \mathbb{1}_{C^4} + \text{zykl. Permutationen.}$

Im Anhang F.2 ist dargestellt, wie sich solche $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$ -Dirac-Spinstrukturen nach der Reduktion mittels der Einbettungsmatrizen \mathcal{T} als $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ -Spinoperatoren darstellen; wir erhalten demnach für die gemäß (3.63) definierten Potentiale $V_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda)$:

$$V_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) = v(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \mathcal{D}_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes V_{\mathcal{F}} \quad (3.109)$$

mit reellen, durch den Typ I...IV der Dirac-Struktur bestimmten Koeffizienten $\mathcal{D}_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) \in \{-1, 0, +1\}$. Von diesen insgesamt 64 Potentialen sind aufgrund der geforderten Symmetrien nur acht ungleich Null. Außerdem folgen aus der Vertauschbarkeit von $\otimes_i \Gamma_i$ mit $\otimes_i \gamma^0 \gamma^5$ Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten der vier Blöcke $(\pm)_1(\pm)_2$:

$$\mathcal{D}_{mn}^{--}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) = -\mathcal{D}_{mn}^{++}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) \quad (3.110)$$

$$\mathcal{D}_{mn}^{-+}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) = \mathcal{D}_{mn}^{+-}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) . \quad (3.111)$$

Für die nach der Fouriertransformation (3.68) im Ortsraum parametrisierten Potentiale gilt dann entsprechend

$$V_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = v(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \mathcal{D}_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes V_{\mathcal{F}}, \quad (3.112)$$

wobei mit (3.105) das fouriertransformierte Potential $v(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$ dann ebenfalls eine reelle, skalare, d.h. drehinvariante Funktion ist:

$$v(\vec{\rho}, \vec{\lambda})^* = v(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) , \quad v(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = v(|\vec{\rho}|^2, |\vec{\lambda}|^2, \vec{\rho} \cdot \vec{\lambda}). \quad (3.113)$$

Für den auf dem $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ -Spinraum wirkenden Operator $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$ folgt weiter aus den geforderten Symmetrien von \mathcal{H} :

- Hermitizität (2.38):

$$\Gamma_1^\dagger \otimes \Gamma_2^\dagger \otimes \Gamma_3^\dagger = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3 \Rightarrow A_1^\dagger \otimes A_2^\dagger \otimes A_3^\dagger = A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \quad (3.114)$$

- Zeitumkehrinvarianz (2.46):

$$\begin{aligned} \gamma^1 \gamma^3 \otimes \gamma^1 \gamma^3 \otimes \gamma^1 \gamma^3 \Gamma_1^* \otimes \Gamma_2^* \otimes \Gamma_3^* &= \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3 \gamma^1 \gamma^3 \otimes \gamma^1 \gamma^3 \otimes \gamma^1 \gamma^3 \\ \Rightarrow \epsilon \otimes \epsilon \otimes \epsilon A_1^* \otimes A_2^* \otimes A_3^* &= A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \epsilon \otimes \epsilon \otimes \epsilon \end{aligned} \quad (3.115)$$

- Rotationsinvarianz:

$$[S_u \otimes S_u \otimes S_u, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_- = 0 \Rightarrow [u \otimes u \otimes u, A_1 \otimes A_2 \otimes A_3]_- = 0 \quad (3.116)$$

$A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 = [A_1 \otimes A_2 \otimes A_3]^{[0]}$ ist daher ein Tensoroperator der Stufe 0.

Im Rahmen der Berechnung der Matrixelemente $\langle \eta_r | V_m^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) | \eta_s \rangle$ gehen wir kurz auf die explizite Form der eingeschobenen Basis $\{\eta_i\}_i$ ein:

Bei der Berechnung der der Matrixelemente $\langle \eta_s | \mathcal{Q}_n \xi_j^{(\pm)_2} \rangle$ haben wir gesehen, daß die Produktbasis $\{\eta_i\}_i$ nur Zustände besitzen muß, die Eigenzustände zum Drehimpuls J, M_J und den Flavourquantenzahlen T, M_T und S^* des Baryons sind. Ansonsten muß die Basis vollständig sein, also i.a. insbesondere Zustände mit beiden Paritäten $\pi = \pm 1$ und mit allen Symmetrien der Permutationsgruppe S_3 enthalten. Die von uns gewählte Basis wird daher einfach durch direkte Tensorierung der Oszillatorzustände (3.12) bzw. (3.18), der Spinzustände (3.6) und der in Tabelle 3.1 angegebenen $SU(2) \otimes U(1)$ -Flavourbasiszustände gebildet, wobei der Spin S und der Bahndrehimpuls L zum Gesamtdrehimpuls J gekoppelt werden:

$$\eta_i = \eta_{\alpha, L, S, S_{12}, T_{12}, R_F^{12}}^{J, T, S^*} = |[\alpha, L] \otimes [S, S_{12}]_{M_J}^J \rangle \otimes |T, T_{12}, S^*\rangle_{R_F^{12}}. \quad (3.117)$$

Zu gegebenen Quantenzahlen J, M_J, T, M_T, S^* sind diese Zustände durch die Quantenzahlen $i = (\alpha = (n_\rho, l_\rho, n_\lambda, l_\lambda), L, S, S_{12}, T_{12}, R_F^{12})$ durchindiziert. In dieser Basis erhalten wir dann für die Matrixelemente der Potentiale $V_m^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$:

$$\begin{aligned} \langle \eta_i | V_m^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) | \eta_{i'} \rangle &= \mathcal{D}_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) \\ &\times \langle [\alpha, L] \otimes [S, S_{12}]_{M_J}^J | v(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) | A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 | [\alpha', L'] \otimes [S', S'_{12}]_{M_J}^J \rangle \\ &\times \langle T, T_{12}, S^*; R_F^{12} | V_{\mathcal{F}} | T', T'_{12}, S^*; R_F'^{12} \rangle \\ &= \mathcal{D}_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) \\ &\times \delta_{LL'} \delta_{SS'} \frac{1}{L} \frac{1}{S} \langle \alpha, L | v(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) | \alpha', L' \rangle \langle S, S_{12} | [A_1 \otimes A_2 \otimes A_3]^{[0]} | S', S'_{12} \rangle \\ &\times \langle T, T_{12}, S^*; R_F^{12} | V_{\mathcal{F}} | T', T'_{12}, S^*; R_F'^{12} \rangle \end{aligned} \quad (3.118)$$

Je nach Art der Symmetrisierung des 3-Teilchen-Wechselwirkungskernes bzgl. der Permutationsgruppe S_3 gibt es verschiedene Möglichkeiten, das lokale 3-Teilchen-Potential

$$V(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\rho}', \vec{\lambda}') = V(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \delta^{(3)}(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \delta^{(3)}(\vec{\lambda} - \vec{\lambda}') \quad (3.119)$$

im Ortsraum zu parametrisieren:

1. Parametrisierung durch 2-Teilchen-Potentiale (skalares Potential und Dirac-Struktur werden gemeinsam symmetrisiert):

$$\begin{aligned} V(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) &= v(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \Gamma \otimes \Gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^4} V_{\mathcal{F}}^{(12)} + v(|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|) \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^4} \otimes \Gamma \otimes \Gamma V_{\mathcal{F}}^{(23)} \\ &\quad + v(|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|) \Gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^4} \otimes \Gamma V_{\mathcal{F}}^{(31)} \\ &= V^{(12)}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) + V^{(23)}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) + V^{(31)}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \end{aligned} \quad (3.120)$$

mit Γ vom Typ 1,2,3 oder 4.

2. Parametrisierung als 3-Teilchen-Potential (skalares Potential und Dirac-Struktur werden einzeln symmetrisiert):

$$V(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = v(|\vec{\rho}|^2, |\vec{\lambda}|^2, \vec{\rho} \cdot \vec{\lambda}) [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{sym}}, \quad (3.121)$$

Hier kann $v(|\vec{\rho}|^2, |\vec{\lambda}|^2, \vec{\rho} \cdot \vec{\lambda})$ ein echtes 3-Teilchen-Potential sein, oder wiederum aus skalaren 2-Teilchen-Potentialen gemittelt sein.

In dieser Arbeit werden sämtliche Wechselwirkungen (das Confinement und die durch Instantonen induzierte Restwechselwirkung) durch 2-Teilchen-Potentiale beschrieben. In diesem Fall gestaltet sich die Berechnung der Potentialmatrixelemente $\langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} \phi_j^{(\pm)2} \rangle$ besonders einfach, da unter Ausnutzung der totalen Antisymmetrie der Baryonwellenfunktionen ϕ_k^\pm die Wechselwirkung nur für ein Quarkpaar berechnet werden muß:

Seien Π_{13} und Π_{23} die Transpositionen, die sämtliche Indizes und Koordinaten von Teilchen 1 und 3 bzw. 2 und 3 vertauschen, dann gilt wegen

$$\begin{aligned} \Pi_{13} \hat{V}^{(12)}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \Pi_{13} &= \hat{V}^{(23)}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \quad , \quad \Pi_{23} \hat{V}^{(12)}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \Pi_{23} = \hat{V}^{(31)}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \\ \text{und} \quad \Pi_{13} \phi_k^\pm &= \Pi_{23} \phi_k^\pm = -\phi_k^\pm, \end{aligned} \quad (3.122)$$

daß

$$\begin{aligned} \langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V}^{(23)} \phi_j^{(\pm)2} \rangle &= \langle \phi_k^{(\pm)1} \Pi_{13} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V}^{(12)} \Pi_{13} \phi_j^{(\pm)2} \rangle \\ &= \langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V}^{(12)} \phi_j^{(\pm)2} \rangle, \\ \langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V}^{(31)} \phi_j^{(\pm)2} \rangle &= \langle \phi_k^{(\pm)1} \Pi_{23} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V}^{(12)} \Pi_{23} \phi_j^{(\pm)2} \rangle \\ &= \langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V}^{(12)} \phi_j^{(\pm)2} \rangle. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Damit folgt

$$\langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V}^{(23)} \phi_j^{(\pm)2} \rangle = \langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V}^{(31)} \phi_j^{(\pm)2} \rangle = \langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V}^{(12)} \phi_j^{(\pm)2} \rangle \quad (3.124)$$

und schließlich

$$\langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V} \phi_j^{(\pm)2} \rangle = 3 \langle \phi_k^{(\pm)1} | \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \hat{V}^{(12)} \phi_j^{(\pm)2} \rangle. \quad (3.125)$$

Die Berechnung des Wechselwirkungsmatrixelementes für das Teilchenpaar 1,2 reicht also aus, so daß auch nur die Matrixelemente $V^{(12)}_{m^{(\pm)1}n^{(\pm)2}}$ nach (3.118) berechnet werden müssen:

$$\begin{aligned} \langle \eta_i | V^{(12)}_{m^{(\pm)1}n^{(\pm)2}}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \eta_{i'} \rangle &= \mathcal{D}_{mn}^{(\pm)1(\pm)2}(\Gamma \otimes \Gamma \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^4}) \delta_{LL'} \delta_{SS'} \delta_{S_{12}S'_{12}} \frac{1}{\hat{L}} \frac{1}{\hat{S}} \\ &\times \langle \alpha, L | v(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) | \alpha', L \rangle \langle S, S_{12} | [A \otimes A]^{[0]} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^4} | S, S_{12} \rangle \\ &\times \langle T, T_{12}, S^*; R_F^{12} | V_{\mathcal{F}}^{(12)} | T, T'_{12}, S^*; R_F'^{12} \rangle \end{aligned} \quad (3.126)$$

Die Berechnung von $\langle \alpha, L | v(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) | \alpha', L \rangle = \langle \alpha, L | v(\sqrt{2} |\vec{\rho}|) | \alpha', L \rangle$ erfordert dann nur noch eine eindimensionale Integration:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, L | v(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) | \alpha', L \rangle &= (-1)^{n_\rho + n'_\rho} \hat{L} \delta_{n_\lambda n'_\lambda} \delta_{l_\lambda l'_\lambda} \delta_{l_\rho l'_\rho} \\ &\times \int d\rho \rho^2 R_{n_\rho l_\rho}^\beta(\rho) v(\sqrt{2} |\vec{\rho}|) R_{n'_\rho l'_\rho}^\beta(\rho) \end{aligned} \quad (3.127)$$

3.3.2 Die Berechnung der Matrixelemente der kinetischen Energie

Die Berechnung der Matrixelemente

$$\sum_{i=1}^3 \langle \phi_k^\pm | \omega(\vec{p}_i) \phi_j^\pm \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \xi_k^{\pm\pi} | \omega(\vec{p}_i) \xi_j^{\pm\pi} \rangle \quad (3.128)$$

der kinetischen Energie (3.44) gestaltet sich wesentlich einfacher als bei den Matrixelementen der Wechselwirkung. Hier verschwindet nämlich aufgrund der Eigenschaft

$$[T^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger H(\vec{p}_i) T^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \omega(\vec{p}_i) [T^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)]^\dagger T^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) = \omega(\vec{p}_i) \mathbb{1} \quad (3.129)$$

der Einbettungsoperator, der in den Wechselwirkungsmatrixelementen zu den Operatoren \mathcal{Q}_i führte.

Auch hier ist wieder in dem Standard-Koordinatensatz $(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)$ wegen $\vec{p}_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_\lambda$ die Berechnung des Matrixelementes für das Teilchen 3, also von

$$\omega_3(\vec{p}_3) = \omega_3(-\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_\lambda) = \sum_{f_3=n,s} \omega(-\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_\lambda; m_{f_3}) \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes P_{f_3} \quad (3.130)$$

am einfachsten. Das Matrixelement bzgl. der Impuls-Spin-Flavour-Produktzustände (3.74)

$$|\alpha, L; S, S_{12}; JM_J; (t_1, t_2, t_3) T, T_{12}, M_T\rangle \equiv |[\alpha, L] \otimes [S, S_{12}]^J_{M_J}\rangle \otimes |(t_1, t_2, t_3) T, T_{12}, M_T\rangle$$

separiert wieder in einen Spin-Impulsraum-Anteil und einen Flavourraum-Anteil:

$$\begin{aligned} & \langle \alpha, L; S, S_{12}; JM_J; (t_1, t_2, t_3) T, T_{12}, M_T | \omega_3(\vec{p}_3) | \alpha', L'; S', S'_{12}; J'M'_J; (t'_1, t'_2, t'_3) T', T'_{12}, M'_T \rangle \\ &= \sum_{f_3=n,s} \langle [\alpha, L] \otimes [S, S_{12}]^J_{M_J} | \omega(\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_\lambda; m_{f_3}) | [\alpha', L'] \otimes [S', S'_{12}]^{J'}_{M'_J} \rangle \\ & \quad \langle (t_1, t_2, t_3) T, T_{12}, M_T | \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes P_{f_3} | (t'_1, t'_2, t'_3) T', T'_{12}, M'_T \rangle \end{aligned} \quad (3.131)$$

Für das Flavourmatrixelement bekommt man mit einer trivialen Rechnung:

$$\begin{aligned} & \langle (t_1, t_2, t_3) T, T_{12}, M_T | \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes P_{f_3} | (t'_1, t'_2, t'_3) T', T'_{12}, M'_T \rangle \\ &= \langle [[t_1] \otimes [t_2]]^{T_{12}} \otimes [t_3]]^T_{M_T} | \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes P_{f_3} | [[t'_1] \otimes [t'_2]]^{T'_{12}} \otimes [t'_3]]^{T'}_{M'_T} \rangle \\ &= \delta_{TT'} \delta_{M_T M'_T} \delta_{T_{12} T'_{12}} \delta_{t_1 t'_1} \delta_{t_2 t'_2} \delta_{t_3 t'_3} \delta_{t(f_3)}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Für das Spin-Impulsraum-Matrixelement findet man ebenfalls leicht:

$$\begin{aligned} & \langle [\alpha, L] \otimes [S, S_{12}]^J_{M_J} | \omega(\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_\lambda; m_{f_3}) | [\alpha', L'] \otimes [S', S'_{12}]^{J'}_{M'_J} \rangle = \\ & \delta_{JJ'} \delta_{M_J M'_J} \delta_{SS'} \delta_{S_{12} S'_{12}} \delta_{LL'} \delta_{l_\rho l'_\rho} \delta_{n_\rho n'_\rho} \delta_{l_\lambda l'_\lambda} \int_0^\infty dp_\lambda p_\lambda^2 R_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(p_\lambda) R_{n'_\lambda l'_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(p_\lambda) \omega(\sqrt{\frac{2}{3}} p_\lambda; m_{f_3}). \end{aligned} \quad (3.133)$$

Wie bei der Berechnung der Wechselwirkungsmatrixelemente können wir wieder die totale Antisymmetrie der Baryonbasiszustände ϕ_k^\pm unter Permutationen ausnutzen, um die gesamte kinetische Energie zu berechnen:

Seien Π_{13} und Π_{23} die Transpositionen, die sämtliche Indizes und Koordinaten von Teilchen 1 und 3 bzw. 2 und 3 vertauschen, dann gilt wegen

$$\begin{aligned} \Pi_{13} \omega_3(\vec{p}_3) \Pi_{13} &= \omega_1(\vec{p}_1) \quad , \quad \Pi_{23} \omega_3(\vec{p}_3) \Pi_{23} = \omega_2(\vec{p}_2) \\ \text{und} \quad \Pi_{13} \phi_k^\pm &= \Pi_{23} \phi_k^\pm = -\phi_k^\pm, \end{aligned} \quad (3.134)$$

daß

$$\begin{aligned} \langle \phi_k^\pm | \omega_1(\vec{p}_1) \phi_j^\pm \rangle &= \langle \phi_k^\pm | \Pi_{13} \omega_3(\vec{p}_3) \Pi_{13} \phi_j^\pm \rangle = \langle \phi_k^\pm | \omega_3(\vec{p}_3) \phi_j^\pm \rangle, \\ \langle \phi_k^\pm | \omega_2(\vec{p}_2) \phi_j^\pm \rangle &= \langle \phi_k^\pm | \Pi_{23} \omega_3(\vec{p}_3) \Pi_{23} \phi_j^\pm \rangle = \langle \phi_k^\pm | \omega_3(\vec{p}_3) \phi_j^\pm \rangle. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Damit folgt schließlich:

$$\sum_{i=1}^3 \langle \phi_k^\pm | \omega_i(\vec{p}_i) \phi_j^\pm \rangle = 3 \langle \phi_k^\pm | \omega_3(\vec{p}_3) \phi_j^\pm \rangle = 3 \langle \xi_k^{\pm\pi} | \omega_3(\vec{p}_3) \xi_j^{\pm\pi} \rangle. \quad (3.136)$$

Die Berechnung der Matrixelemente der kinetischen Energie für Teilchen 3 reicht also aus !

Kapitel 4

Baryonspektren im Salpeter-Modell

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir die Bethe-Salpeter-Gleichung mit einer instantanen Wechselwirkung (Salpeter-Gleichung) analysiert und diese Gleichung in die für die numerische Lösung adäquate Matrixform gebracht. Wir wollen nun diesen Formalismus als Grundlage für ein Quarkmodell der leichten Baryonen mit u-, d- und s-Quarkinhalt benutzen und damit die Struktur der Baryonspektren analysieren. Der Wechselwirkungskern besteht hierzu aus dem Confinementanteil und einer Instanton-induzierten Quark-Quark-Restwechselwirkung. Der phänomenologische Confinementanteil wird im Ortsraum mit linear ansteigenden 2-Teilchen-Potentialen parametrisiert (2-Teilchen-Confinement) und mit einer Kombination aus skalarer ($\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$) und zeitartiger Vektor-Spinstruktur ($\gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \mathbf{1}$) versehen.

Wir wollen in diesem Kapitel insbesondere die Bedeutung der Instanton-induzierten Restwechselwirkung für die Struktur der Baryonspektren diskutieren, deren Verwendung bereits im nicht-relativistischen Quarkmodell eine vernünftige einheitliche Beschreibung der Baryon- und Mesonspektren ermöglichte [21,22,24]. In der Arbeit von Münz und Resag [13,12] wurde bereits die 't Hooftsche Kraft im Rahmen eines kovarianten Modells für Mesonen verwendet. Sie konnten mit ihrer Hilfe die korrekte $\pi - \eta - \eta'$ -Massenaufspaltung und $\eta - \eta'$ -Flavourmischung berechnen. Es wird sich zeigen, daß in diesem relativistischen Modell die Struktur der Baryonspektren in allen Sektoren vernünftig beschrieben werden kann. Insbesondere liefert die 't Hooftsche Kraft zusammen mit einem geeigneten Confinement-Potential die korrekte Aufspaltung zwischen den Oktett- und Dekuplett-Grundzustandsbaryonen. Ein besonders erfreuliches Resultat wird sein, daß die Verwendung der Instanton-induzierten Restwechselwirkung im Rahmen unseres relativistischen Salpeter-Modells das Roper-Problem für die Zustände $N_{****}^{\frac{1}{2}+}(1440)$ und $\Lambda_{***}^{\frac{1}{2}+}(1600)$ löst.

4.1 Einführung

Bevor wir unser explizites Modell der Wechselwirkung vorstellen und die damit gewonnenen Spektren darstellen und diskutieren, wollen wir kurz auf die experimentelle Situation der beobachteten Baryonen eingehen; anschließend werden wir kurz erörtern, inwieweit diese Situation bisher von nichtrelativistischen Quarkmodellen beschrieben bzw. nicht beschrieben werden konnte.

4.1.1 Die experimentelle Situation

In der aktuellsten Zusammenstellung der Particle Data Group [37] werden etwa 100 Baryonresonanzen aufgeführt. Sie sind nach den in der starken Wechselwirkung erhaltenen Quantenzahlen klassifiziert: Gesamtdrehimpuls J , Parität π und Flavourquantenzahlen wie Isospin T und Stran-

geness S^* . Die Existenz von ungefähr 60 dieser Resonanzen gilt als etabliert:

14 N^- , 11 Δ^- , 10 Σ^- , 14 Λ^- , 6 Ξ^- und 2 Ω^- -Baryonresonanzen haben den Status '***' oder '****', von denen aber zum kleinen Teil (hauptsächlich im Σ^- , Ξ^- und Ω^- -Sektor) nicht alle Quantenzahlen gemessen wurden. Die übrigen Resonanzen ('**' und '*') sind experimentell nicht evident. Ziel unseres Modells ist eine einheitliche Beschreibung zumindest der Grobstruktur, aber auch anderer auffälliger Merkmale in den experimentell gefundenen Spektren aller Sektoren. Wir stellen daher kurz die Hauptmerkmale der beobachteten Baryonspektren dar:

- Die Betrachtung der Massenaufspaltungen zwischen den Grundzustandsbaryonen (56-plett) mit den verschiedenen Flavourinhalten nnn, nns, nss und sss zeigt, daß die Massen des Dekupletts etwa linear mit der Zahl der enthaltenen strange-Quarks (also mit wachsendem $|S^*|$) ansteigt. Die Abstände zwischen den Dekuplett-Grundzustandsbaryonen mit verschiedener Strangeness sind also ungefähr gleich:

$$\Delta_{****}^{\frac{3}{2}+}(1232) - \Sigma_{****}^{*\frac{3}{2}+}(1385) \approx \Sigma_{****}^{*\frac{3}{2}+}(1385) - \Xi_{****}^{*\frac{3}{2}+}(1530) \approx \Xi_{****}^{*\frac{3}{2}+}(1530) - \Omega_{****}^{\frac{3}{2}+}(1672) \quad (4.1)$$

Dieses experimentelle Faktum zeigt, daß die Flavour- $SU(3)$ -Symmetrie explizit gebrochen ist. Diese Aufspaltungen sollten in einem Modell, welches nur das Confinement und die kinetische Energie berücksichtigt, sämtliche Restwechselwirkungen aber vernachlässigt, durch Wahl einer schwereren s-Quarkmasse beschreibbar sein:

$$m_u = m_d < m_s. \quad (4.2)$$

Weiterhin beobachtet man aber auch Aufspaltungen zwischen den Dekuplett- und Oktett-Grundzuständen mit gleichen Flavourinhalten:

$$\begin{aligned} N_{****}^{\frac{1}{2}+}(939) - \Delta_{****}^{\frac{3}{2}+}(1232) & \quad \text{im Nonstrange(nnn)-Sektor,} \\ \Sigma_{****}^{\frac{1}{2}+}(1193) - \Sigma_{****}^{*\frac{3}{2}+}(1385) & \quad \text{im nns-Strange-Sektor,} \\ \Xi_{****}^{\frac{1}{2}+}(1318) - \Xi_{****}^{*\frac{3}{2}+}(1530) & \quad \text{im nss-Strange-Sektor,} \end{aligned}$$

sowie die Aufspaltung

$$\Sigma_{****}^{\frac{1}{2}+}(1193) - \Lambda_{****}^{\frac{1}{2}+}(1116) \quad (4.3)$$

innerhalb des Oktetts (im nns-Strange-Sektor). Diese Aufspaltungen sind eine Evidenz für die Existenz einer kurzreichweitigen, explizit spin-flavourabhängigen Wechselwirkung. Man benötigt daher neben dem Confinement eine zusätzliche Restwechselwirkung zwischen den Quarks, um die obigen spin-flavourabhängigen Aufspaltungen im Baryonspektrum beschreiben zu können. Häufig wird dazu im nichtrelativistischen Quarkmodell die Fermi-Breit-Wechselwirkung benutzt, die aus der nichtrelativistischen Reduktion des Ein-Gluon-Austausches folgt und zu einer zentralen Spin-Spin-Wechselwirkung führt. Die Verwendung des Ein-Gluon-Austauschs ist für Systeme mit leichten Quarks (u, d, s), also bei niedrigen Energien, allerdings fragwürdig, da diese Wechselwirkung auf einer Störungsentwicklung basiert. Außerdem ist der Ein-Gluon-Austausch eine Wechselwirkung, die nicht auf die Flavourfreiheitsgrade der Quarks wirkt! Wir verwenden im Rahmen unseres Salpeter-Modells stattdessen die Instanton-induzierte Quark-Quark-Restwechselwirkung, dessen Herleitung zum erstenmal von 't Hooft [32–34] angegeben wurde. Diese Wechselwirkung führt zu Diquark-Korrelationen und hat damit im Gegensatz zum Ein-Gluon-Austausch die Eigenschaft, explizit nicht nur von Spin-, sondern auch von Flavourfreiheitsgraden abzuhängen.

- Ein auffälliges Merkmal in den Baryonenspektren positiver Parität ist, daß es für alle Flavours einen tiefliegenden angeregten Zustand mit den gleichen Quantenzahlen des Grundzustands gibt, der innerhalb oder sogar unter den ersten Anregungszuständen der negativen Parität positioniert ist:

Das Paradebeispiel ist der als **Roper-Resonanz** bekannte $N_{****}^{\frac{1}{2}+}(1440)$ -Zustand. Die in den Σ - und Λ -Sektor analogen **Roper-Typ-Resonanzen** sind die Zustände $\Sigma_{***}^{\frac{1}{2}+}(1660)$ und $\Lambda_{***}^{\frac{1}{2}+}(1600)$. Wir werden in der späteren Diskussion unserer Resultate sehen, daß wir auch dieses Merkmal in den Baryonspektren mit Hilfe der Instanton-induzierten Restwechselwirkung beschreiben können.

- Eine weitere auffällige Struktur ist, daß (insbesondere in den Spektren negativer Parität) die angeregten Zustände mit aufeinanderfolgendem Drehimpuls entartete Bandstrukturen bilden. Diese deuten darauf hin, daß Spin-Bahn-Aufspaltungen bei den angeregten Zuständen im allgemeinen verhältnismäßig klein sind.

Im Rahmen des Oszillator-Baryonmodells spricht man von den $1\hbar\omega$ -, $3\hbar\omega$ - und $5\hbar\omega$ -Bändern bei den Resonanzen negativer Parität und von den $2\hbar\omega$ - und $4\hbar\omega$ -Bändern bei den Resonanzen positiver Parität. Interessant ist auch, wie sich die Schwerpunkte dieser Bänder für die negativen und positiven Paritäten relativ zueinander anordnen:

Im N -Sektor haben die Gruppen der ersten angeregten Resonanzen negativer ($1\hbar\omega$) und positiver ($2\hbar\omega$) Parität, sowie die Gruppen der zweiten Anregungen negativer ($3\hbar\omega$) und positiver ($4\hbar\omega$) Parität jeweils einen gemeinsamen Schwerpunkt.

Im Δ -Sektor sind die Bänder der Anregungen negativer Parität um eine Einheit ($\hbar\omega$) nach unten verschoben: Die Schwerpunkte der ersten Anregungen positiver Parität ($2\hbar\omega$) und die zweiten Anregungen negativer Parität ($3\hbar\omega$), sowie die Schwerpunkte der zweiten Anregungen positiver Parität ($4\hbar\omega$) und der dritten Anregungen negativer Parität ($5\hbar\omega$) fallen jeweils zusammen.

Der Λ -Sektor zeigt das gleiche Entartungsmuster wie die N -Resonanzen. Die Situation im Σ -, Ξ - und Ω -Sektor ist wegen fehlender experimenteller Daten unklar.

- Eine Ausnahme bzgl. dieser Bandstrukturen stellt die $\Lambda_{****}^{\frac{1}{2}-}(1405)$ -Resonanz dar; sie besitzt sogar eine niedrigere Anregungsenergie als die tiefsten nukleonischen Anregungszustände und ist der niedrigste Zustand mit negativer Parität überhaupt. Die Aufspaltung zwischen den Resonanzen $\Lambda_{****}^{\frac{1}{2}-}(1405)$ und $\Lambda_{****}^{\frac{3}{2}-}(1520)$ wird als Hinweis gedeutet, daß Spin-Bahn-Wechselwirkungen unter Umständen doch einen Einfluß auf das Baryonenspektrum haben könnten. Es wird sich zeigen, daß im Rahmen unseres relativistischen Salpeter-Baryonmodells diese Aufspaltung mit Hilfe der 't Hooftschen Wechselwirkung beschrieben werden kann!
- Die Resonanzpositionen zeigen bei höheren Anregungsenergien eine Abhängigkeit vom Drehimpuls $J \sim M^2$ (Regge-Trajektorien). Es ist gerade diese spezielle Abhängigkeit, welche die traditionelle Beschreibung des Confinements durch einen gluonischen String motiviert, dessen Energie proportional zu der Länge des Strings zwischen den Quarks wächst.

4.1.2 Resultate und ungelöste Probleme im nichtrelativistischen Quarkmodell

Wir wollen kurz diskutieren, inwieweit im nichtrelativistischen Quarkmodell die oben beschriebenen Hauptmerkmale des experimentellen Baryonenspektrums erklärt werden können und welche Phänomene weiterhin unerschlossen bleiben. Wir beziehen uns hierbei auf die Arbeiten von

B. C. Metsch [22] und W. H. Blask [21,23], sowie auf die Diplomarbeit von V. Keiner [24]. Das dort beschriebene nichtrelativistische Baryonmodell basiert auf einem 3-Körper-String-Confinementpotential und einer nichtrelativistischen Reduktion der Instanton-induzierten qq -Restwechselwirkung. Darüberhinaus wird zu einer besseren Beschreibung der Massenaufspaltungen im Baryonspektrum die Ankopplung an die Meson-Baryon-Kanäle berücksichtigt. In diesen Arbeiten ergeben sich folgende Resultate bzgl. der oben genannten Hauptmerkmale des Baryonspektrums:

- Grundzustände und erste Anregungen:

Die Grundzustandsbaryonen und die spin-flavourabhängige Aufspaltung, sowie die ersten angeregten (mit Ausnahme der Roper-Typ-Resonanzen, siehe unten) Baryonresonanzen werden gut beschrieben.

- Lage der Bandstrukturen:

Die oben geschilderte Lage der Bandstrukturen im experimentellen Baryonspektrum kann nicht befriedigend erklärt werden: Im N -Sektor positiver Parität liegen die angeregten $2\hbar\omega$ - und $4\hbar\omega$ -Zustände um 200 MeV bzw. 400 MeV zu hoch ('Roper-puzzle'). Ein gleiches Bild zeigt sich in den Δ - und Σ -Sektoren positiver Parität. Die Entartung des $3\hbar\omega$ -Bandes im Δ -Sektor negativer Parität mit dem $2\hbar\omega$ -Band positiver Parität kann ebenfalls nicht richtig beschrieben werden, da auch hier die angeregten $3\hbar\omega$ -Resonanzen um etwa 200 MeV zu hoch liegen.

Diese Resultate könnten eine Unzulänglichkeit der nichtrelativistischen Behandlung sein und es stellt sich die Frage, inwieweit unser relativistisches Quarkmodell im Rahmen der Salpeter-Gleichung die Lage der Bandschwerpunkte für die höheren Anregungen vielleicht besser beschreiben kann.

- Roper-Typ-Zustände:

Die Beschreibung der Roper-Resonanz $N_{***}^{\frac{1}{2}+}(1440)$ und der analogen Roper-Typ-Resonanzen $\Sigma_{***}^{\frac{1}{2}+}(1660)$ und $\Lambda_{***}^{\frac{1}{2}+}(1600)$ bleibt im nichtrelativistischen Quarkmodell ein weiterhin ungelöstes Problem:

Die Instanton-induzierte Restwechselwirkung, sowie die Ankopplung an die Meson-Baryon-Kanäle bewirkt zwar eine selektive Absenkung dieser Resonanzen und die richtige Massenaufspaltung gegenüber den anderen ersten angeregten Zuständen positiver Parität, aber dennoch liegt ihre Position immer noch um etwa 200 MeV zu hoch!

Wir wollen im Rahmen unseres relativistischen Baryonmodells schwerpunktmäßig diese Problematik aufgreifen und untersuchen, inwieweit hier die relativistische Behandlung insbesondere der Instanton-induzierten qq -Restwechselwirkung zur Lösung der Roper-Problematik beitragen kann.

- Die $\Lambda_{***}^{\frac{1}{2}-}(1405)$ -Resonanz:

Die experimentelle Lage der tiefliegenden $\Lambda_{***}^{\frac{1}{2}-}(1405)$ -Resonanz konnte in dem Modell von Metsch und Blask [22,21,23] nicht beschrieben werden. Erst eine zusätzliche Ankopplung an die K-Zerfallskanäle in der Arbeit von Keiner [24] lieferte die gewünschte Absenkung der Resonanz. Auch hier werden wir untersuchen, ob in unserem relativistischen Modell die Lage der Resonanz mit Hilfe der 't Hooftschen Wechselwirkung abgesenkt werden kann.

4.2 Der Bethe-Salpeter-Wechselwirkungskern

Im folgenden werden wir die explizite Form des irreduziblen 3-Teilchen-Wechselwirkungskernes für unser Modell angeben. Unser Modell basiert auf einem Confinementkern, der mit der von 't Hooft [32,34,33] aus Instantoneffekten berechneten effektiven qq -Restwechselwirkung kombiniert wird. In den in Abschnitt 4.1.2 erwähnten nichtrelativistischen Quarkmodellen [21,22,24] führte diese Art von Wechselwirkung bereits zu guten Resultaten bei der einheitlichen Beschreibung von Baryon- und Mesonspektren. In dem relativistischen Salpeter-Mesonmodell von Münz und Resag [10–13], die ebenfalls die entsprechenden $q\bar{q}$ -Kerne dieser Wechselwirkung in ihrer Salpeter-Gleichung verwendeten, konnten sowohl die Spektren als auch die Zerfallseigenschaften der Mesonen sehr gut beschrieben werden. Ihr Confinement basiert auf skalaren und zeitartigen Vektor-Spinstrukturen. Ein entsprechender Ansatz verspricht daher auch in unserem relativistischen Salpeter-Baryonmodell gute Ergebnisse zu liefern.

4.2.1 Das Confinement

Die Confinementhypothese besagt, daß es keine freien Quarks gibt. Der dynamische Ursprung des Confinements im Rahmen der QCD ist allerdings bis heute nicht richtig verstanden: Aufgrund der großen Kopplungskonstante bei niedrigen Energien (das entspricht großen Abständen) ist es nicht möglich, über einen störungstheoretischen Ansatz das Confinement zu beschreiben. Somit gibt es keinen QCD-motivierten Wechselwirkungskern für die Beschreibung des langreichweitigen Teils der qq -Wechselwirkung. Wir haben also das Confinement durch den Ansatz eines phänomenologischen Potentials zu parametrisieren, um so den Quarkeinschluß zu realisieren. Es liegt nahe für den Ortsanteil des Confinement-Wechselwirkungskernes ein mit dem Abstand der Quarks linear ansteigendes Potential zu wählen. Dieser Ansatz entspricht dem traditionellen Bild des Confinements als gluonischem Stringpotential und erklärt den empirisch beobachteten Zusammenhang zwischen Masse und Drehimpuls $M^2 \sim J$ (Regge-Trajektorien). Auch QCD-Gitterrechnungen motivieren diesen Ansatz.

Es bleibt noch, die ebenfalls in der QCD nicht bekannte, zum Confinement gehörende Dirac-Struktur zu spezifizieren. Für die Beschreibung des qq -Confinements mögliche, d.h mit Lorentzinvarianz verträgliche Spinstrukturen $\Gamma \otimes \Gamma$ sind

- Skalar $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$
- Pseudoskalar $\gamma^5 \otimes \gamma^5$
- Vektor $\gamma_\mu \otimes \gamma^\mu$
- Axialvektor $\gamma_\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5$
- Tensor $\sigma_{\mu\nu} \otimes \sigma^{\mu\nu}$ mit $\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$

Entsprechend der Phänomenologie der Hadronspektroskopie (siehe 4.1.1) sollte die Spinstruktur in der führenden Ordnung keine Spin-Spin-Wechselwirkungen enthalten. Dieses phänomenologische Argument trifft eine Auswahl der oben angegebenen möglichen Spinstrukturen: Entsprechend den Ausführungen von Gromes [28] führt die nichtrelativistische Reduktion der Salpeter-Gleichung für Wechselwirkungskerne, die Axialvektor- oder Tensorkopplungen enthalten, auf Spin-Spin-Terme in führender Ordnung; diese beiden Kopplungen sind im Hinblick auf die experimentelle Situation in den Hadronspektren also von vornherein auszuschließen. Die Pseudoskalar-Kopplung liefert in nullter Ordnung überhaupt keinen Beitrag zu einem statischen Potential. Wir werden in unserem Salpeter-Baryonmodell wie in dem relativistischen Salpeter-Mesonmodell von Münz und Resag den Confinementkern aus einer Kombination von skalaren $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ und zeitartigen Vektorkopplungen $\gamma^0 \otimes \gamma^0$ für die Wechselwirkung zweier Quarks annehmen.

Wir können in Konsistenz mit dem Bild des Confinements als gluonischem String je nach Art der Symmetrisierung bzgl. S_3 das linear ansteigende Potential auf drei verschiedene Arten realisieren:

1. Als echtes 3-Teilchen-String-Potential (3-Körper-Confinement), dessen Energie proportional der kürzesten Verbindung der drei Quarks wächst:

$$V_{qqq}^{\text{conf}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = v_{qqq}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \left[\Gamma^1 \otimes \Gamma^2 \otimes \Gamma^3 \right]_{\text{Sym}} \quad (4.4)$$

mit

$$v_{qqq}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = a_{qqq} + b_{qqq} \min_{\vec{x}_0} \sum_{i=1}^3 |\vec{x}_i - \vec{x}_0| \quad (4.5)$$

und einer bereits für sich symmetrischen Spin-Struktur, beispielsweise

$$\begin{aligned} \left[\Gamma^1 \otimes \Gamma^2 \otimes \Gamma^3 \right]_{\text{Sym}} &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ \left[\Gamma^1 \otimes \Gamma^2 \otimes \Gamma^3 \right]_{\text{Sym}} &= \frac{1}{3} \left(\gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \mathbf{1} + \gamma^0 \otimes \mathbf{1} \otimes \gamma^0 + \mathbf{1} \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \right) \\ \left[\Gamma^1 \otimes \Gamma^2 \otimes \Gamma^3 \right]_{\text{Sym}} &= \frac{x}{4} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{1-x}{4} \left(\gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \mathbf{1} + \gamma^0 \otimes \mathbf{1} \otimes \gamma^0 + \mathbf{1} \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \right) \\ &\quad \text{mit } 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Diese Art von Confinement soll in dieser Arbeit nicht betrachtet werden. Rechnungen bzgl. dieser echten Dreikörperkraft im Rahmen unseres Salpeter-Baryonmodells sind in der Diplomarbeit von R. Ricken [36] dokumentiert.

2. Als Summe von 2-Teilchen-String-Potentialen (2-Körper-Confinement):

$$V_{qq}^{\text{conf}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \sum_{i < j} V_{qq}^{(i,j)}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (4.7)$$

mit

$$\begin{aligned} V_{qq}^{(1,2)}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) &= [a_{qq} + b_{qq}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)] \Gamma \otimes \Gamma \otimes \mathbf{1} \\ V_{qq}^{(2,3)}(|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|) &= [a_{qq} + b_{qq}(|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|)] \mathbf{1} \otimes \Gamma \otimes \Gamma \\ V_{qq}^{(3,1)}(|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|) &= [a_{qq} + b_{qq}(|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|)] \Gamma \otimes \mathbf{1} \otimes \Gamma, \end{aligned} \quad (4.8)$$

wobei wir die 2-Teilchen-Spinstrukturen wie folgt wählen:

$$\begin{aligned} \Gamma \otimes \Gamma &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} && \text{skalares Confinement} \\ \Gamma \otimes \Gamma &= \gamma^0 \otimes \gamma^0 && \text{zeitartiges Vektor-Confinement} \\ \Gamma \otimes \Gamma &= \frac{1}{2} [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \gamma^0 \otimes \gamma^0] && \text{Kombination von beiden} \end{aligned}$$

3. Als Summe von 2-Teilchen-String-Potentialen (2-Körper-Confinement), mit einer eigenen Spinstruktur für den konstanten Anteil a_{qq} :

Man beachte in 2., daß der konstante Anteil a_{qq} des Confinements mit der gleichen Spinstruktur versehen ist wie das linear ansteigende Potential $b_{qq}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$. Es stellt sich die Frage, ob eine solche Spinstruktur, bzw. welche Spinstruktur für die Konstante a_{qq} überhaupt vernünftig ist. Die Konstante a_{qq} sollte daher im allgemeinen mit einer eigenen Spinstruktur versehen werden:

$$V_{qq}^{\text{conf}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = 3 a_{qq} \left[\Gamma^1 \otimes \Gamma^2 \otimes \Gamma^3 \right]_{\text{Sym}} + \sum_{i < j} V_{qq}^{(i,j)}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (4.9)$$

mit

$$\begin{aligned} V_{qq}^{(1,2)}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) &= b_{qq}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \Gamma \otimes \Gamma \otimes \mathbf{1} \\ V_{qq}^{(2,3)}(|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|) &= b_{qq}(|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|) \mathbf{1} \otimes \Gamma \otimes \Gamma \\ V_{qq}^{(3,1)}(|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|) &= b_{qq}(|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|) \Gamma \otimes \mathbf{1} \otimes \Gamma. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die symmetrische Spinstruktur $[\Gamma^1 \otimes \Gamma^2 \otimes \Gamma^3]_{\text{Sym}}$ für den Confinement-Offset a_{qq} ist beispielsweise wie in (4.6) zu wählen.

Die Verwendung der skalaren Spinstruktur, der zeitartigen Vektor-Spinstruktur und der Kombination der beiden in den Confinement-Typen 2. und 3. wird in der Diplomarbeit von K. Kretschmar [35] bezüglich Stabilität, Spin-Bahn-Effekten und der Beschreibung von Regge-Trajektorien untersucht. Im einzelnen zeigt sich bei dieser Wahl der Confinement-Spinstrukturen:

- Mit der zeitartigen Vektor-Spinstruktur $\Gamma \otimes \Gamma = \gamma^0 \otimes \gamma^0$ erhält man das geforderte Regge-Verhalten $M^2 \sim J$. Die Abhängigkeit der Massen vom Variationsparameter β ist stabil. Für einen hinreichend großen Konfigurationsraum sind die Massen über einen großen Bereich unabhängig von β , so daß das Spektrum wohldefiniert ist. Jedoch sind die unerwünschten Spin-Bahn-Effekte zu groß.
- Mit Wahl der skalaren Spinstruktur $\Gamma \otimes \Gamma = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ geht das geforderte Regge-Verhalten $M^2 \sim J$ verloren, da die Massen der gebundenen Zustände für große Drehimpulse J zu klein berechnet werden. Dieses ist ein Faktum, welches ebenfalls im Rahmen des Salpeter-Modells für Mesonen beobachtet wurde [27, 29]. Darüberhinaus sind hier ebenfalls Spin-Bahn-Effekte sehr groß, sie zeigen aber im Vergleich zur zeitartigen Vektor-Spinstruktur ein umgekehrtes Vorzeichen. Die Abhängigkeit der Massen vom Variationsparameter β ist problematisch; es bildet sich selbst bei großen Baryonbasen kein signifikanter Bereich aus, in dem das Spektrum unabhängig von β ist, so daß die Wahl von β und damit die Massen nicht wohldefiniert sind.
- Die Kombination $\Gamma \otimes \Gamma = \frac{1}{2} [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \gamma^0 \otimes \gamma^0]$ der skalaren Spinstruktur mit der zeitartigen Vektor-Spinstruktur ist für das Confinement gut geeignet: Die unerwünschten Spin-Bahn-Aufspaltungen reduzieren sich um einen Faktor 2, da sich Spin-Bahn-Effekte der skalaren und des zeitartigen Vektor-Confinements gegenseitig aufheben. Das geforderte Regge-Verhalten $M^2 \sim J$ der zeitartigen Vektor-Spinstruktur bleibt erhalten. Für einen hinreichend großen Konfigurationsraum sind die Massen über einen großen Bereich (ca. 0.5 fm) unabhängig von dem Skalierungsparameter β (vergl. Abb. 4.1).

Wir schlagen daher zwei Ansätze für das Confinementpotential vor:

• **Confinement-Modell I:**

$$\begin{aligned} V_{qq}^{\text{conf}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) &= [a_{qq} + b_{qq}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)] \frac{1}{2} [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \mathbf{1}] \\ &\quad + [a_{qq} + b_{qq}(|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|)] \frac{1}{2} [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0] \\ &\quad + [a_{qq} + b_{qq}(|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|)] \frac{1}{2} [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \gamma^0 \otimes \mathbf{1} \otimes \gamma^0] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Bemerkung:

Eine zusätzliche Motivation dieses Ansatzes erfolgt aus dem Salpeter-Modell für Mesonen.

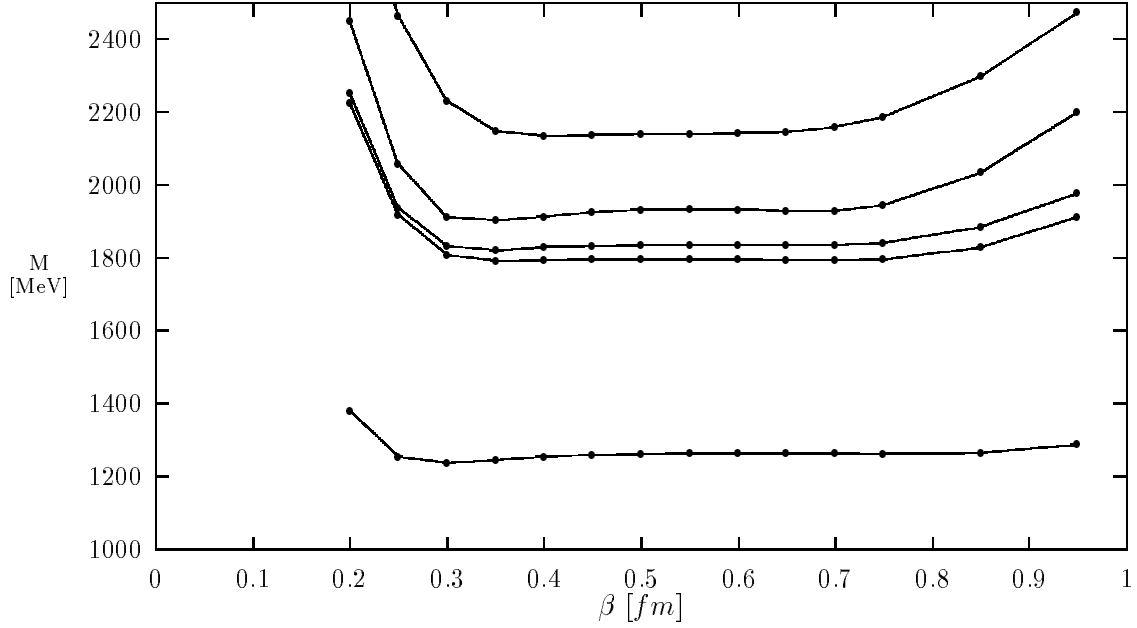


Abbildung 4.1: Die Massen der $\Delta^{\frac{3}{2}+}$ -Resonanzen in Abhängigkeit vom Skalierungsparameter β im Confinement-Modell I. Die Größe des Konfigurationsraumes beträgt $N=10$ Oszillatorschalen.

Münz und Resag [10, 11] haben den folgenden Ansatz für das $q\bar{q}$ -Confinementpotential vorgeschlagen:

$$[V\Phi](\vec{p}, \vec{p}') = \mathcal{V}(\vec{p} - \vec{p}') \left[\Phi(\vec{p}') - \gamma^0 \Phi(\vec{p}') \gamma^0 \right], \quad (4.12)$$

wobei die skalare Funktion $\mathcal{V}(\vec{p} - \vec{p}')$ die Fouriertransformierte des Potentials $\mathcal{V}_F(r) = a_{q\bar{q}} + b_{q\bar{q}} r$ im Ortsraum ist. Die Anwendung der Ladungskonjugation ändert das Vorzeichen vor dem $\gamma^0 \otimes \gamma^0$ -Term und führt damit auf den hier gewählten Ansatz. Diese Wahl des Confinements entspricht damit der kanonischen Erweiterung des Confinements aus dem Mesonmodell.

- **Confinement-Modell II:** Für dieses Confinement-Modell übernehmen wir den Ortsabhängigen Teil des Modells I. Den konstanten Anteil ersetzen durch die Projektor-Spinstruktur

$$\begin{aligned} & \bigotimes_i \frac{\mathbf{1} + \gamma^0}{2} + \bigotimes_i \frac{\mathbf{1} - \gamma^0}{2} \\ &= \frac{1}{4} \left[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 + \gamma^0 \otimes \mathbf{1} \otimes \gamma^0 + \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \mathbf{1} \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Die so gewählte Konstante vermischt keine oberen und unteren Komponenten.

4.2.2 Die 't Hooftsche Wechselwirkung

Aus nichtrelativistischen Potentialmodellen ist bekannt, daß ein Confinementpotential allein nicht die Aufspaltungen zwischen Oktett- und Dekuplett-Grundzustandsbaryonen wie z.B. die $\Delta - N$ -Aufspaltung beschreiben kann. Man muß daher die Quarkwechselwirkung um eine zusätzliche Restwechselwirkung erweitern.

Ein naheliegender Ansatz ist die Erweiterung des Wechselwirkungskernes durch Teile des störungstheoretischen Ein-Gluon-Austauschs. Für Systeme mit leichten Quarks (u, d, s) ist die Verwendung einer störungstheoretisch motivierten Restwechselwirkung allerdings fragwürdig. Außerdem ist der Ein-Gluon-Austausch eine Wechselwirkung, die nicht auf die Flavour-Freiheitsgrade der Quarks wirkt.

Es gibt aber einen weiteren Kandidaten für eine qq -Restwechselwirkung, die nicht direkt auf einen störungstheoretischen Ansatz beruht, sondern aus Instanton-Effekten in der QCD abgeleitet werden kann. Sie wurde erstmals u.a. von 't Hooft berechnet [32–34], weshalb wir die Wechselwirkung im folgenden auch als 't Hooftsche Kraft oder 't Hooftsche Wechselwirkung bezeichnen. Sie wurde bereits erfolgreich in nichtrelativistischen Quarkmodellen [22, 21] für die Berechnung von Baryon- und Mesonspektren verwendet. Sie besitzt die bemerkenswerte Eigenschaft, explizit auf die Flavour-Freiheitsgrade der Quarks zu wirken, so daß man mit ihr im nichtrelativistischen Quarkmodell die Aufspaltung zwischen den Oktett- und Dekuplett-Grundzustandsbaryonen in der korrekten Weise beschreiben konnte. Münz und Resag [10, 11] verwendeten diese Restwechselwirkung ebenfalls schon im Rahmen ihres relativistischen Quarkmodells zur Berechnung der Massen und Zerfallseigenschaften von Mesonen. Mit ihrer Hilfe konnten sie u.a. die $\pi - \eta - \eta'$ -Aufspaltung und die $\eta - \eta'$ -Flavourmischung korrekt beschreiben.

Ein Hauptanliegen dieser Arbeit wird sein, zu dokumentieren, wie die 't Hooftsche Wechselwirkung im Rahmen unseres kovarianten Salpeter-Modells das Spektrum der Grundzustandsbaryonen prägt. Ebenso wollen wir darstellen wie mit Hilfe von 't Hoofts Kraft in diesem Modell das Roper-Problem gelöst wird.

In nichtabelschen Feldtheorien gibt es spezielle Lösungen der klassischen Feldgleichungen (Instantonen), die zur Konstruktion einer effektiven Lagrangedichte für drei Flavours benutzt werden können. Die Normalordnung dieser Lagrangedichte führt u.a. zu einer effektiven 2-Teilchenwechselwirkung¹.

Die effektive 2-Teilchen-Lagrangedichte hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}(2) = & -\frac{3}{16} \sum_i \sum_{kl} \sum_{mn} g_{\text{eff}}(i) \epsilon_{ikl} \epsilon_{imn} \\ & \times \left\{ \bar{q}_k \bar{q}_l \left[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \gamma^5 \otimes \gamma^5 \right] \left(2 \mathcal{P}_3^C + \mathcal{P}_6^C \right) q_m q_n : \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Hierbei sind i, k, l, m, n Flavourindizes; statt der Colour- und Dirac-Indizes benutzen wir die Notation

$$\bar{q}\bar{q}(A \otimes B)qq \equiv \sum_{i,j} \sum_{k,l} \bar{q}_i \bar{q}_j A_{ik} B_{jl} q_k q_l. \quad (4.15)$$

$g_{\text{eff}}(i)$ sind die effektiven Kopplungskonstanten, die als Parameter in unser Modell eingehen. \mathcal{P}_6^C und \mathcal{P}_3^C sind die Projektionsoperatoren auf Colour-Sextett- und Colour-Antitriplett-Zustände:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_6^C &= \frac{1}{2}(\mathbf{1}^C + \Pi^C) = \frac{2}{3}\mathbf{1}^c + \frac{1}{4}\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} \\ \mathcal{P}_3^C &= \frac{1}{2}(\mathbf{1}^C - \Pi^C) = \frac{1}{3}\mathbf{1}^c - \frac{1}{4}\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} \end{aligned} \quad (4.16)$$

wobei der Farbaustauschoperator Π^C definiert ist als $\Pi_{ij,kl}^C = \delta_{il}\delta_{jk}$ und λ^a , $a \in \{1, \dots, 8\}$ die acht Colour- $SU(3)$ -Matrizen bezeichnen. Die beiden ϵ -Tensoren auf dem Flavourraum zeigen explizit die antisymmetrische Flavour-Abhängigkeit der Wechselwirkung.

¹Darüberhinaus erhält man ebenfalls den Anteil einer 3-Teilchen-Wechselwirkung. Dieser besitzt allerdings Projektoren auf Farb-Oktett- und Farb-Dekuplett-Zustände, die für qqq -Colour-Singulett-Zustände keinen Beitrag liefern.

Durch Anwendung des Wickschen Theorems extrahiert man aus der 4-Punkt-Greensfunktion erster Ordnung

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) = -i \int d^4y \langle 0 | T \Psi_1(x_1) \Psi_2(x_2) \bar{\Psi}_1(x'_1) \bar{\Psi}_2(x'_2) (-\Delta \mathcal{L}(2)(y)) | 0 \rangle \quad (4.17)$$

folgenden lokalen, instantanen Beitrag einer 2-Teilchen-Kraft zum Wechselwirkungskern:

$$\left[V_{\text{t Hooft}}^{(12)} \right]_{12 \, 1'2'}(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = \delta^{(4)}(x_1 - x'_1) \delta^{(4)}(x_2 - x'_2) \delta(x_1^0 - x_2^0) \left[V_{\text{t Hooft}}^{(12)} \right]_{12 \, 1'2'}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad (4.18)$$

mit

$$\begin{aligned} \left[V_{\text{t Hooft}}^{(12)} \right]_{12 \, 1'2'}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= -\frac{3}{8} \sum_f g_{\text{eff}}(f) \epsilon_{ff_1 f_2} \epsilon_{ff'_1 f'_2} \left[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \gamma^5 \otimes \gamma^5 \right]_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} \\ &\quad \times \left(\mathcal{P}_6^C + 2 \mathcal{P}_3^C \right)_{c_1 c_2 c'_1 c'_2} \delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \\ &\quad - (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Indizes s , f und c bezeichnen hier Dirac-, Flavour- und Colourindizes. Der zweite Term ($1 \leftrightarrow 2$) beschreibt einen zweiten Vertex, bei dem die Endzustands-Teilchen vertauscht sind. Bei der Anwendung des Kernes auf total antisymmetrische Baryonzustände liefert die Vertauschung der Endzustands-Teilchen nur ein Vorzeichen, so daß beide Vertizes durch einen Faktor 2 zusammengefaßt werden können.

Bilden wir die Matricelemente dieser Wechselwirkung, so kann das Colour-Matricelement abgespariert und direkt berechnet werden:

$$\langle \mathcal{C}_A | \left(\mathcal{P}_6^C + 2 \mathcal{P}_3^C \right) | \mathcal{C}_A \rangle = 2 \langle \mathcal{C}_A | \mathcal{P}_3^C | \mathcal{C}_A \rangle = 2 . \quad (4.20)$$

Es liefert damit ebenfalls einen Faktor 2.

Der 3-Teilchen-Kern für die Instanton-induzierte qq -Restwechselwirkung in unserem Salpeter-Baryonmodell wird schließlich durch eine Summe der Zweiteilchenwechselwirkungen angesetzt:

$$V_{\text{t Hooft}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = V_{\text{t Hooft}}^{(12)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + V_{\text{t Hooft}}^{(23)}(\vec{x}_2 - \vec{x}_3) + V_{\text{t Hooft}}^{(31)}(\vec{x}_3 - \vec{x}_1) , \quad (4.21)$$

wobei

$$V_{\text{t Hooft}}^{(12)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \quad (4.22)$$

$$-4 \left(g \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{12}}^{\mathcal{F}}(nn) + g' \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{12}}^{\mathcal{F}}(ns) \right) \left[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \gamma^5 \otimes \gamma^5 \otimes \mathbf{1} \right] \delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) . \quad (4.23)$$

$\mathcal{P}_{\mathcal{A}_{ij}}^{\mathcal{F}}(nn)$ ist hierbei der Projektor auf Flavourzustände die in i und j nonstrange und antisymmetrisch sind; entsprechend projiziert $\mathcal{P}_{\mathcal{A}_{ij}}^{\mathcal{F}}(ns)$ auf Flavourzustände die in i und j strange und antisymmetrisch sind. Die zugehörigen Kopplungskonstanten sind definiert als

$$g = \frac{3}{8} g_{\text{eff}}(s) \quad \text{und} \quad g' = \frac{3}{8} g_{\text{eff}}(n) . \quad (4.24)$$

Die 't Hooftsche Wechselwirkung ist eine Punktwechselwirkung und wegen der δ -Funktion singular. Sie muß daher regularisiert werden. Dazu ersetzen wir die δ -Funktion durch eine Gauß-Funktion:

$$\delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \longrightarrow \frac{1}{\lambda^3 \pi^{\frac{3}{2}}} e^{-\left(\frac{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}{\lambda} \right)^2} . \quad (4.25)$$

Der Parameter λ kann als effektive Reichweite der Instanton-induzierten qq -Restwechselwirkung angesehen werden.

Im nichtrelativistischen Grenzfall führt die Restwechselwirkung auf Auswahlregeln auf dem Flavour- und Ortsraum. Die Gesamtsymmetrie der Wellenfunktion und die Tatsache, daß die Dirac-Struktur $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \gamma^5 \otimes \gamma^5$ der 't Hooftschen Wechselwirkung einen Projektor darstellt, folgt eine weitere Auswahlregel im Spinraum:

Insgesamt wirkt sie nur auf 2-Teilchenzustände, die antisymmetrisch im Flavour- und Spinraum sind und symmetrische Impuls- bzw. Ortswellenfunktionen mit trivialem 2-Teilchen-Bahndrehimpuls besitzen (Diquarks). Im nichtrelativistischen Quarkmodell ist die Wechselwirkung somit eine Paarkraft, die 2-Quarkzustände mit trivialen Quantenzahlen im Spin- und Bahndrehimpuls zu sogenannten skalaren Diquarks korreliert.

Die Wirkung der 't Hooftschen Kraft auf die Baryonzustände in unserem Modell ist nicht so unmittelbar einsichtig, da aufgrund der Einbettungsoperation zwischen den $2 \times 2 \times 2$ -Baryonzuständen die Operatoren \mathcal{Q} stehen. Die Wirkung auf skalare Diquarks wird sicherlich noch dominant sein, doch könnte prinzipiell die 't Hooftsche Wechselwirkung in unserem Modell ebenfalls auf Diquarks mit nichttrivialem Spin wirken, so daß eine andere Wirkung der 't Hooftschen Kraft als im nichtrelativistischen Quarkmodell möglich ist.

4.3 Die Resultate und ihre Diskussion

4.3.1 Die Massenspektren der Baryonen

Wir wollen in diesem Abschnitt die mit unserem Salpeter-Baryonmodell berechneten Spektren diskutieren.

Wir hatten bereits im Abschnitt 4.1.2 angesprochen, daß zunächst nicht klar ist, wie die Spinstruktur für die Konstante a_{qq} des Confinementpotentials zu wählen ist. Wir werden daher die zwei vorgeschlagenen Varianten des Confinements I und II untersuchen, die sich strukturell nur durch die für die Konstante a_{qq} gewählte Spinstruktur unterscheiden. Wir berechnen und diskutieren also die Baryonspektren in den beiden folgenden Modellen:

- Modell I : Confinement-Modell I + 't Hoofts Kraft
- Modell II: Confinement-Modell II + 't Hoofts Kraft

In den Abbildungen 4.2 bis 4.7 sind jeweils die berechneten Spektren beider Modelle für die Δ , N , Λ , Σ und Ω -Baryonen dargestellt. Das obere Bild zeigt jeweils die Resultate des Modells I, das untere die entsprechenden Ergebnisse des Modells II. Zu jedem Drehimpuls, für den gemessene Resonanzen vorliegen [37], wird jeweils links das berechnete und rechts das experimentelle Spektrum abgebildet. Die Kästchen um die experimentellen Werte stellen die Unsicherheit der gemessenen Resonanzpositionen dar.

Bevor wir die einzelnen Sektoren diskutieren, wollen wir einige Bemerkungen über die Parameter der Modelle machen.

Parameter

Unser Modell benötigt insgesamt 7 Parameter: dazu gehören zunächst die nonstrange-Masse m_n und die strange-Masse m_s , die Konstante a_{qq} und die Confinement-Steigung b_{qq} des Confinementpotentials, sowie die Kopplungsstärken g, g' und die Reichweite λ der Instanton-induzierten Restwechselwirkung.

Da die 't Hooftsche Kraft nicht auf die Dekuplett-Zustände wirkt, und die Δ -Zustände nur nonstrange-Quarkinhalt besitzen, werden in beiden Modellen die nonstrange-Quarkmasse m_n , sowie die Parameter a_{qq}, b_{qq} des Confinementpotentials durch die Anpassung des Δ -Spektrums an die experimentellen Resonanz-Positionen bestimmt. Die 't Hooft-Kopplungsstärke g wird dann am $N^{\frac{1}{2}+}$ -Grundzustand angepaßt. Um eine genügend starke Wirkung der 't Hooftschen Kraft zu realisieren, muß der Reichweitenparameter λ klein gegenüber der charakteristischen Längenskala der Baryonen sein.

Mit den am nonstrange-Sektor fixierten Confinementparametern wird die strange-Quarkmasse so gewählt, daß die durch die Flavour- $SU(3)$ -Brechung bedingte Aufspaltung zwischen den Dekuplett-Grundzustandsbaryonen mit unterschiedlicher Strangeness richtig beschrieben wird. Die Kopplungsstärke g' für das strange-Diquark wird durch die Anpassung der Oktett-Grundzustandsbaryonen Σ und Ξ festgelegt.

Bemerkung:

Im Modell II ist die Anpassung der Modellparameter im großen und ganzen unproblematisch. Im Modell I bereitet die richtige Wahl der Kopplungsstärken g und g' Probleme: Die Wahl der Kopplungskonstanten g erfordert einen Kompromiß bzgl. der Absenkung des $N^{\frac{1}{2}+}$ und des $\Lambda^{\frac{1}{2}+}$; es zeigt sich nämlich, daß mit wachsender Kopplungskonstante g das Λ stärker abgesenkt wird als das Nukleon, was der Erwartung aus dem Experiment widerspricht. Eine konsistente Beschreibung von N und Λ ist deshalb nicht möglich. Ebenso ist ein Kompromiß bei der Wahl der Kopplungsstärke g' notwendig: Σ wird wesentlich schwächer durch 't Hoofts Kraft beeinflusst als Ξ ; auch dies widerspricht der Erwartung aus dem Experiment. Die Wirkung von 't Hoofts Kraft

auf die Oktett-Grundzustandsbaryonen ist ein grundsätzliches Problem im Modell I, das wir ausführlich im Abschnitt 4.3.2 dokumentieren und diskutieren werden. Es zeigt sich schließlich, daß eine konsistente Beschreibung der Grundzustandsbaryonen im Modell I nicht möglich ist, wie man auch in den folgenden Spektren der Baryonen erkennen kann.

Die in den beiden Modellen verwendeten Parameter sind in der Tabelle 4.1 angegeben.

Parameter	Modell I	Modell II
m_n	230 MeV	230 MeV
m_s	550 MeV	550 MeV
a_{qq}	-1210 MeV	-872 MeV
b_{qq}	1300 MeV fm ⁻¹	1108 MeV fm ⁻¹
g	120 MeV fm ³	80 MeV fm ³
g'	70 MeV fm ³	70 MeV fm ³
λ	0.2 fm	0.2 fm

Tabelle 4.1: Die Parameter für die Modelle I und II.

Das Spektrum der Δ -Resonanzen

Die Abbildung 4.2 zeigt das Spektrum der Δ -Resonanzen. Wie man sieht, können beide Modelle die wesentlichen Strukturen des experimentellen Δ -Spektrums erklären.

Die Instanton-induzierte Wechselwirkung wirkt nicht auf Flavour-Dekuplett-Zustände. Sämtliche Resonanzen des Δ -Spektrums sind daher vollständig durch das Confinementpotential und die kinetische Energie bestimmt.

Der $\Delta^{\frac{3}{2}+}$ -Grundzustand liegt in beiden Modellen etwas zu hoch; das liegt daran, daß wir den Grundzustand nicht optimal an den experimentellen Wert angepaßt haben, um noch eine akzeptable Beschreibung der beiden ersten angeregten Zustände negativer Parität, $\Delta^{\frac{1}{2}-}$ und $\Delta^{\frac{3}{2}-}$, zu erreichen. Diese beiden Zustände zeigen relativ zueinander die falsche Aufspaltung: $\Delta^{\frac{3}{2}-}$ liegt in beiden Modellen zu tief.

Ein wesentlicher Fortschritt gegenüber dem nichtrelativistischen Quarkmodell zeigt sich in der Beschreibung der angeregten Zustände negativer Parität in der $3\hbar\omega$ -Schale: im nichtrelativistischen Quarkmodell lagen diese Zustände um über 300 MeV zu hoch [23,21,22]. Die Absenkung dieser Resonanzen durch die relativistischen Effekte ist in den Sektoren $\Delta^{\frac{1}{2}-}$ und $\Delta^{\frac{3}{2}-}$ so groß, daß tatsächlich berechnete Zustände mit experimentell gefundenen Resonanzen identifiziert werden können. Die Absenkung führt dazu, daß die tiefsten Zustände des $3\hbar\omega$ -Bandes quasi mit Zuständen der $2\hbar\omega$ -Schale positiver Parität entartet sind. Allerdings ist die Zahl der in diesem Bereich berechneten Zustände wesentlich höher als die Zahl der experimentell beobachteten Zustände.

Im Spektrum positiver Parität liegt die berechnete Position der $\Delta^{\frac{1}{2}+}$ -Resonanz aufgrund zu starker Spin-Bahn-Effekte [35] zu tief, die übrigen Zustände der $2\hbar\omega$ -Schale in den Sektoren $\Delta^{\frac{3}{2}+}$, $\Delta^{\frac{5}{2}+}$ und $\Delta^{\frac{7}{2}+}$ werden von beiden Modellen in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment beschrieben.

Ein weiterer Fortschritt unseres kovarianten Baryonmodells gegenüber nichtrelativistischen Modellen besteht darin, daß sogar die höheren Drehimpulse in guter Übereinstimmung mit dem Experiment erklärt werden können. Im nichtrelativistischen Quarkmodell lagen die berechneten Resonanzen höherer Drehimpulse um über 400 MeV zu hoch!! Insbesondere zeigt sich in beiden Modellen, daß überall dort, wo sich ein experimentell beobachteter Zustand befindet, sich selektiv ein Zustand von den übrigen Zuständen der gleichen Oszillator-Schale absenkt. Dieses beobachtet man zum Beispiel in den Sektoren $\Delta^{\frac{11}{2}+}$, $\Delta^{\frac{9}{2}-}$ und $\Delta^{\frac{13}{2}-}$.

Im großen und ganzen wird das Δ -Spektrum also von beiden Modellen gleich gut beschrieben.

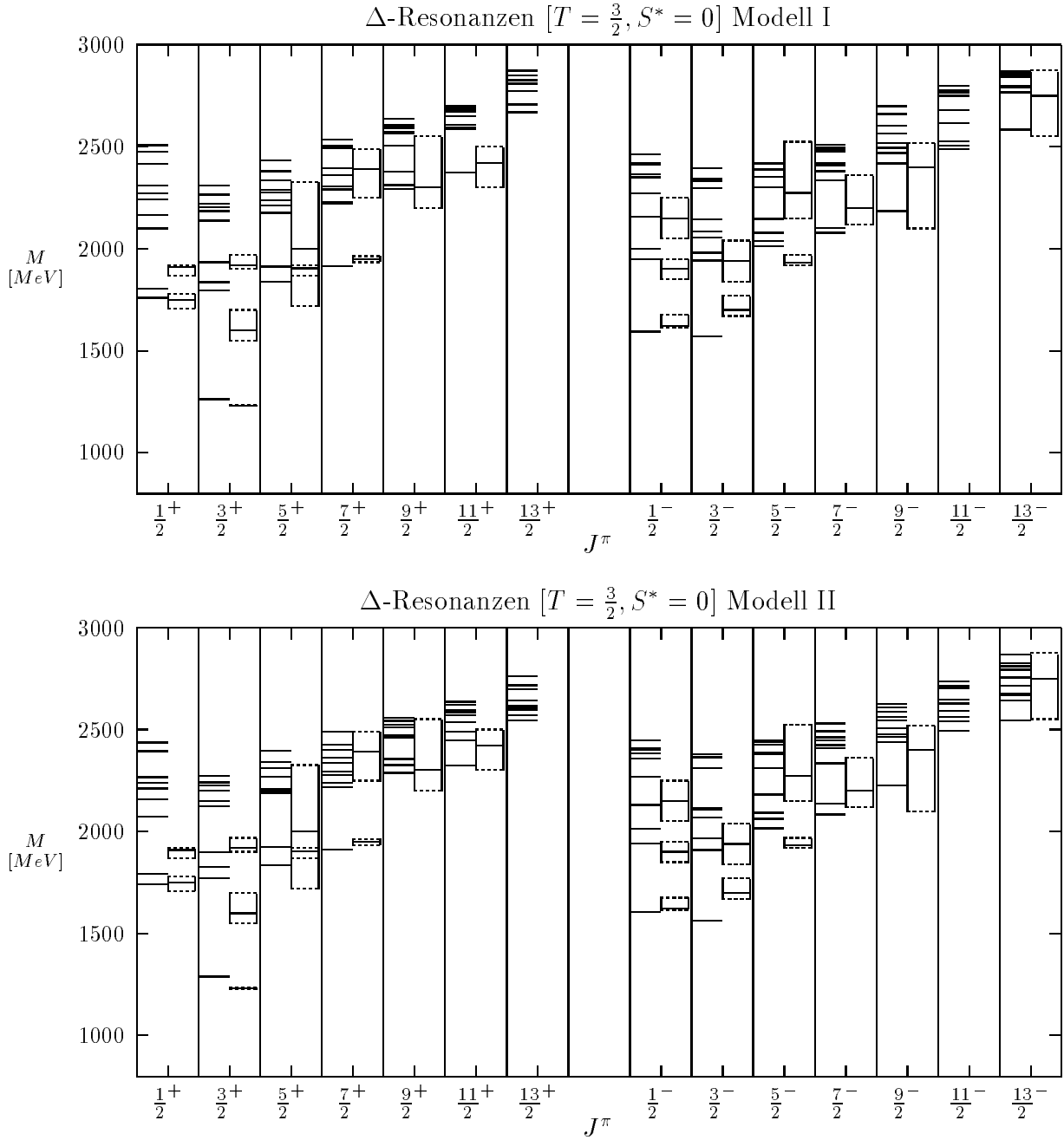


Abbildung 4.2: Das Δ -Spektrum. In jeder Spalte sind für festes J^π links die berechneten und rechts die experimentell bekannten Zustände dargestellt. Die berechneten Zustände sind nach Spin und Parität klassifiziert. Die experimentelle Resonanzposition ist durch einen Strich angegeben, die Box deutet den Bereich der Fehlergrenzen an.

Das Spektrum der N -Resonanzen

Abbildung 4.3 zeigt das Spektrum der N -Resonanzen für beide Modelle I und II. Im N -Sektor bewirkt die Instanton-induzierte qq -Restwechselwirkung eine Massenaufspaltung nach Maßgabe der Zahl der in den Zuständen vorhandenen (skalaren) Diquarkkomponenten.

Für das Nukleon $N^{\frac{1}{2}+}$, also dem Oktett-Grundzustandsbaryon dieses Sektors ist diese Aufspaltung am größten. Mit Hilfe von 't Hoofts Kraft wird also wie schon im nichtrelativistischen Quarkmodell [23, 21, 22] die $N - \Delta$ -Aufspaltung richtig wiedergegeben. Im Modell I muß allerdings dafür die Kopplungsstärke g wesentlich größer gewählt werden als im Modell II. Auf die Absenkung des Nukleons N durch die Wirkung der 't Hooftschen Kraft, die zu der im Experiment beobachteten $N - \Delta$ -Aufspaltung führt, werden wir im Abschnitt 4.3.2 noch ausführlicher dokumentieren.

Ein besonderer Erfolg unseres Modells ist, daß sich im $N^{\frac{1}{2}+}$ -Sektor infolge der Wirkung der 't Hooftschen Kraft selektiv ein Zustand aus der $2\hbar\omega$ -Schale absenkt, und zwar weit genug, um den als Roper-Resonanz bekannten Zustand $N^{\frac{1}{2}+}(1440)$ beschreiben zu können. In beiden Modellen wird dieses auffällige Merkmal etwa gleich gut beschrieben. Im Modell II wird darüberhinaus ein weiterer Zustand der $2\hbar\omega$ -Schale absenkt, der die experimentell beobachtete '***'-Resonanz $N^{\frac{1}{2}+}(1710)$ gut reproduziert. Auch diesen Effekt der 't Hooftschen Wechselwirkung wollen wir im Abschnitt 4.3.2 genauer dokumentieren.

Zwar hat man in nichtrelativistischen Quarkmodellen ebenfalls eine Absenkung dieser Roper-Resonanz beobachtet, jedoch lag bei einer korrekten Anpassung des $N^{\frac{1}{2}+}$ -Grundzustandes diese immer noch weit (etwa 200 MeV) über der experimentellen Position. Dieses Resultat zeigt, daß für die Beschreibung der Roper-Resonanz offenbar relativistische Effekte eine ganz wesentliche Rolle spielen!

Wie beim Δ -Spektrum liegen sämtliche Zustände der $2\hbar\omega$ -Schale positiver Parität in der vom Experiment geforderten Höhe, nämlich etwas oberhalb der ersten angeregten Zustände negativer Parität der $1\hbar\omega$ -Schale. Im Modell II wird diese Situation etwas besser beschrieben als im Modell I.

Die niedrigsten Anregungen negativer Parität erfahren durch die Wirkung von 't Hoofts Kraft ebenfalls eine Aufspaltung. Die Differenz der beiden $N^{\frac{1}{2}-}$ -Zustände wird von beiden Modellen richtig beschrieben, im Modell II liegt die Position der beiden Resonanzen allerdings etwas zu tief. Entsprechendes gilt für die ersten angeregten $N^{\frac{3}{2}-}$ -Zustände. Ein nicht so glücklicher Effekt ist, daß die 't Hooftsche Kraft in den $N^{\frac{1}{2}-}$ - und $N^{\frac{3}{2}-}$ -Sektoren einen Zustand der $3\hbar\omega$ -Schale bis in die $1\hbar\omega$ -Schale absenkt. Insbesondere im $N^{\frac{3}{2}-}$ -Sektor ist die Zuordnung der berechneten Resonanzen zu den experimentellen Resonanzen nicht eindeutig, denn experimentell wurde ein solcher Zustand noch nicht beobachtet.

Wie im Δ -Sektor wird auch im N -Sektor die experimentell beobachtete Lage der $3\hbar\omega$ -Schale negativer Parität auf etwa gleicher Höhe mit der $4\hbar\omega$ -Schale positiver Parität korrekt beschrieben. Allerdings ist auch hier wieder die Dichte der berechneten Zustände sehr groß. Von den berechneten Resonanzen fallen aber sämtliche in die Fehlerbereiche der experimentell beobachteten Zustände, die so groß sind, daß vielleicht mehrere Resonanzen in diesen Bereichen nicht aufgelöst werden konnten.

Wie wir es schon im Δ -Spektrum beobachtet haben, werden Zustände mit hohen Drehimpulsen von beiden Modellen gut beschrieben. Die Zustände negativer Parität liegen allerdings etwas zu tief; für die Zustände $N^{\frac{7}{2}-}$ und $N^{\frac{11}{2}-}$ beträgt die Abweichung vom Experiment in beiden Modellen etwa 100 MeV.

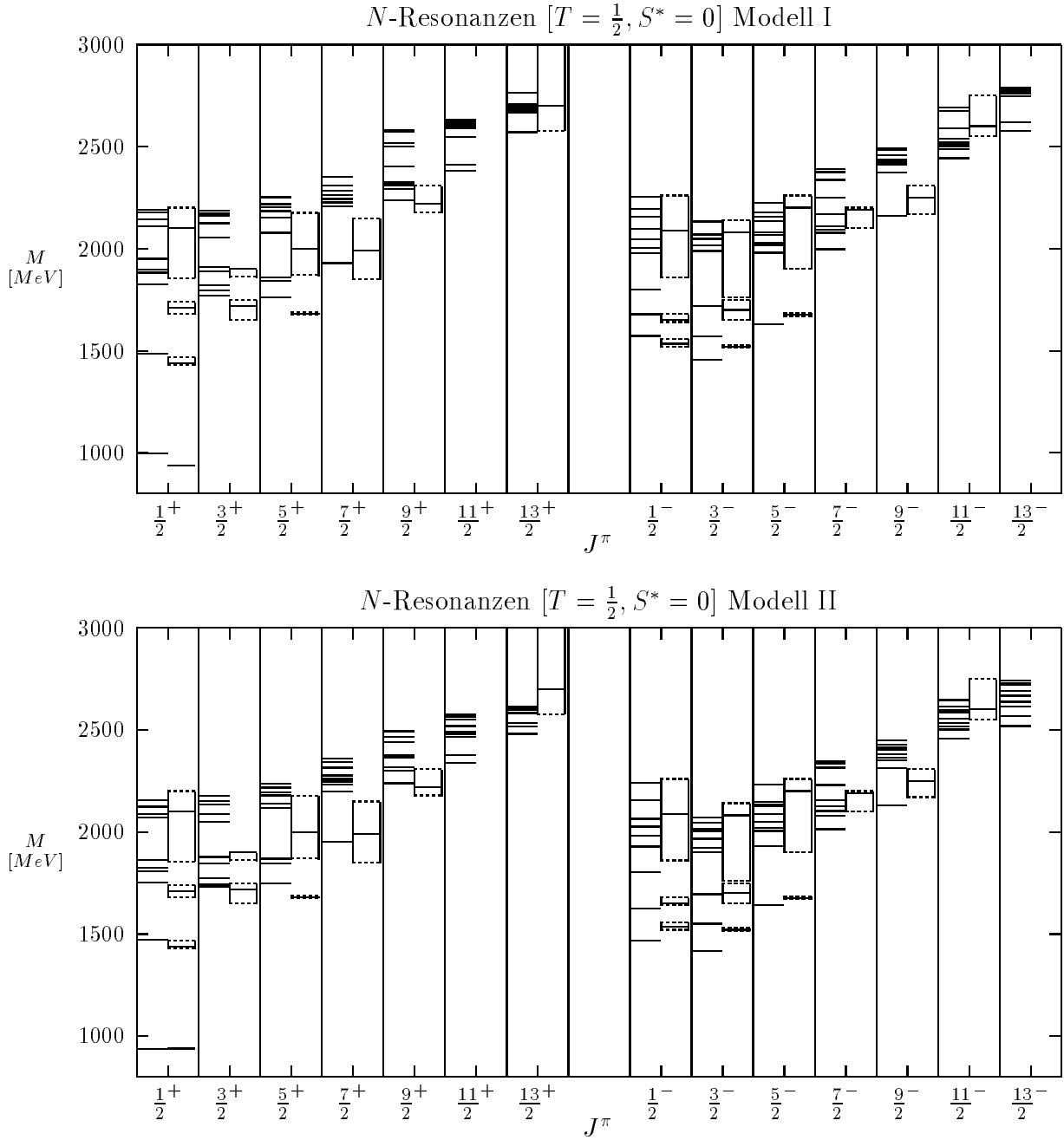


Abbildung 4.3: Das N -Resonanz-Spektrum. Zur Erläuterung siehe Beschriftung der Abbildung 4.2.

Das Spektrum der Λ -Resonanzen

Abbildung 4.4 zeigt für beide Modelle das Spektrum der Λ -Resonanzen.

Im Λ -Sektor wirkt die 't Hooftsche Kraft sowohl auf nonstrange- als auch auf strange-Diquarks. Am stärksten wird wieder der Oktett-Baryongrundzustand $\Lambda^{\frac{1}{2}+}$ abgesenkt. Diese Absenkung erfolgt im wesentlichen durch den nonstrange-Diquarkinhalt des $\Lambda^{\frac{1}{2}+}$, also hauptsächlich durch die Kopplungsstärke g , zum kleinen Teil durch g' .

Wir hatten den Wert von g durch die korrekte $\Delta - N$ -Aufspaltung fixiert. Im Modell II gelingt mit diesem Wert von g in konsistenter Weise ebenfalls die geforderte Absenkung des $\Lambda^{\frac{1}{2}+}$ -Oktett-Grundzustands auf den experimentell beobachteten Wert. Dagegen sehen wir im Modell I das bereits angesprochene Problem, daß durch das zu große g der $\Lambda^{\frac{1}{2}+}$ -Grundzustand zu stark abgesenkt wird. Im Modell I können deshalb die Grundzustände N und Λ nicht konsistent beschrieben werden.

Wie im $N^{\frac{1}{2}+}$ -Sektor spaltet sich auch im $\Lambda^{\frac{1}{2}+}$ -Sektor ein Zustand aus der $2\hbar\omega$ -Schale in beiden Modellen genügend stark ab, um den zur N -Roper-Resonanz analogen Roper-Typ-Zustand $\Lambda^{\frac{1}{2}+}(1600)$ in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment beschreiben zu können. Der zweite angeregte $\Lambda^{\frac{1}{2}+}$ -Zustand wird ebenfalls durch den Einfluß der 't Hooftschen Wechselwirkung in beiden Modellen bis auf den experimentellen Wert abgesenkt. Insgesamt werden die Zustände der $2\hbar\omega$ -Schale mit den Drehimpulsen $J^\pi = \frac{1}{2}^+, \frac{3}{2}^+$ und $\frac{5}{2}^+$ in beiden Modellen gut beschrieben.

Das Spektrum der negativen Paritäten wird vom Modell II besser reproduziert: Im $\Lambda^{\frac{3}{2}-}$ -Sektor fallen die ersten beiden Anregungen mit den experimentell beobachteten Resonanzen zusammen. Im $\Lambda^{\frac{1}{2}-}$ -Sektor ist die Übereinstimmung mit dem Experiment ebenfalls zufriedenstellend. In beiden Modellen ist es sogar möglich, die Aufspaltung zwischen der $\Lambda^{\frac{3}{2}-}(1520)$ - und der tiefliegenden $\Lambda^{\frac{1}{2}-}(1405)$ -Resonanz tendenziell zu beschreiben. Die $\Lambda^{\frac{1}{2}-}(1405)$ -Resonanz wird um etwa nur 40 MeV verfehlt. Es zeigt sich, daß auch diese Aufspaltung ein Instanton-Effekt ist, also durch die 't Hooftsche Kraft verursacht wird, denn bei Abwesenheit der 't Hooftschen Wechselwirkung sind beide Zustände entartet. Wir werden dies im Abschnitt 4.3.2 dokumentieren. Wir benötigen für die Beschreibung der tiefliegenden $\Lambda^{\frac{1}{2}-}(1405)$ also keinen zusätzlichen Spin-Bahn-Effekt, mit dem man diese Aufspaltung früher zu erklären versucht hatte.

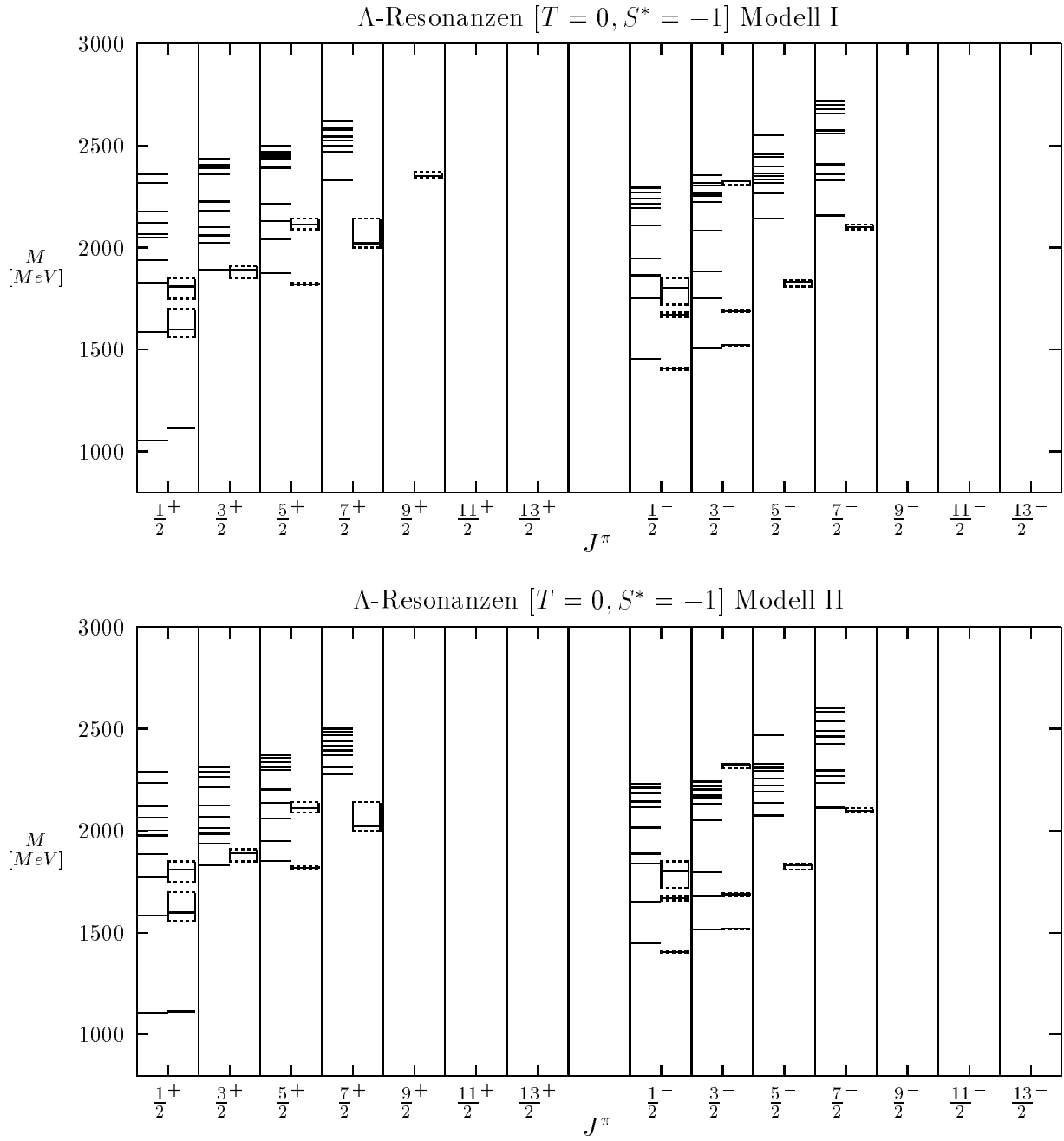


Abbildung 4.4: Das Λ -Resonanz-Spektrum. Zur Erläuterung siehe Beschriftung der Abbildung 4.2.

Das Spektrum der Σ -Resonanzen

Bei den Spektren der Σ -Resonanzen (Abbildung 4.5) ist auffällig daß das Modell II die $\Sigma - \Sigma^*$ -Aufspaltung wesentlich besser reproduziert als das Modell I, welches etwa nur die Hälfte der experimentell gemessenen Aufspaltung liefert. Dieses Problem ist in der unterschiedlichen Wirkung von 't Hoofts Kraft auf die Oktett-Grundzustandsbaryonen Σ und Ξ begründet: Mit der im Modell I gewählten Kopplungsstärke g' liegt nämlich das Ξ bereits unter dem experimentellen Wert (vergl. Abb. 4.6) und sogar unter dem Σ . Eine konsistente Beschreibung der Grundzustände Σ und Ξ ist im Modell I nicht möglich!

Die Roper-Typ-Resonanz $\Sigma^{\frac{1}{2}+}(1660)$ wird ebenfalls im Modell II besser beschrieben; eine Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert wie im Fall der N - und Λ -Roper-Resonanzen gelingt jedoch auch nicht im Modell II: sie liegt etwa 100 MeV zu hoch. Allerdings ist dieses Resultat ein großer Fortschritt gegenüber dem nichtrelativistischen Modell [23], in dem die Roper-Resonanz $\Sigma^{\frac{1}{2}+}(1660)$ um etwa 300 bis 400 MeV verfehlt wurde. Die Zustände mit höheren Drehimpulsen wie $\Sigma^{\frac{7}{2}+}$ und $\Sigma^{\frac{5}{2}-}$ werden richtig berechnet. Insgesamt ist die Beschreibung der experimentellen Situation des Σ -Sektors bei beiden Modellen nicht so gut wie in den anderen Sektoren.

Das Spektrum der Ξ -Resonanzen

Im Ξ -Sektor (siehe Abbildung 4.6) gibt es insgesamt nur drei Zustände, deren Quantenzahlen vollständig bekannt sind.

Im Modell II ist die $\Xi - \Xi^*$ -Aufspaltung zu groß: der Oktett-Grundzustand Ξ liegt zu tief, der Dekuplett-Grundzustand Ξ^* liegt um den gleichen Betrag zu hoch. Im Modell I wird die $\Xi - \Xi^*$ -Aufspaltung korrekt beschrieben, jedoch liegen beide Zustände zu tief.

Die experimentelle Lage der Resonanz $\Xi^{\frac{3}{2}-}$ wird in beiden Modellen richtig berechnet.

Wie in den $N^{\frac{1}{2}+}$ -, $\Lambda^{\frac{1}{2}+}$ - und $\Sigma^{\frac{1}{2}+}$ -Sektoren berechnen wir auch im $\Xi^{\frac{1}{2}+}$ -Sektor einen Zustand der selektiv gegenüber den anderen Zuständen der $2\hbar\omega$ -Schale abgesenkt wird. Ein experimenteller Kandidat für diesen Roper-Typ-Zustand könnte die $\Xi^{??}(1950)$ -Resonanz sein, deren Spin und Parität aber nicht bekannt sind.

Das Ω -Spektrum

Im Ω -Sektor (siehe Abbildung 4.7) gibt es nur einen Zustand, nämlich den $\Omega^{\frac{3}{2}+}(1672)$ -Grundzustand, dessen Quantenzahlen vollständig bekannt sind. Von den übrigen Resonanzen $\Omega_{***}^{??}(2252)$, $\Omega_{**}^{??}(2380)$ und $\Omega_{**}^{??}(2474)$ sind der Drehimpuls J und die Parität π unbekannt; wir haben sie daher in alle Sektoren $J^\pi = \frac{1}{2}^+, \frac{1}{2}^-, \frac{3}{2}^+, \frac{3}{2}^-$ mit eingezeichnet. Der $\Omega^{\frac{3}{2}+}(1672)$ -Zustand liegt im Modell II etwa 60 MeV zu hoch. Dieses Resultat ist allerdings besser als im Modell I, wo der Zustand um ca. 130 MeV zu tief liegt. Die Identifizierung der von uns berechneten angeregten Zuständen in den vier dargestellten Sektoren mit den Zuständen $\Omega_{***}^{??}(2252)$, $\Omega_{**}^{??}(2380)$ und $\Omega_{**}^{??}(2474)$ ist schwierig.

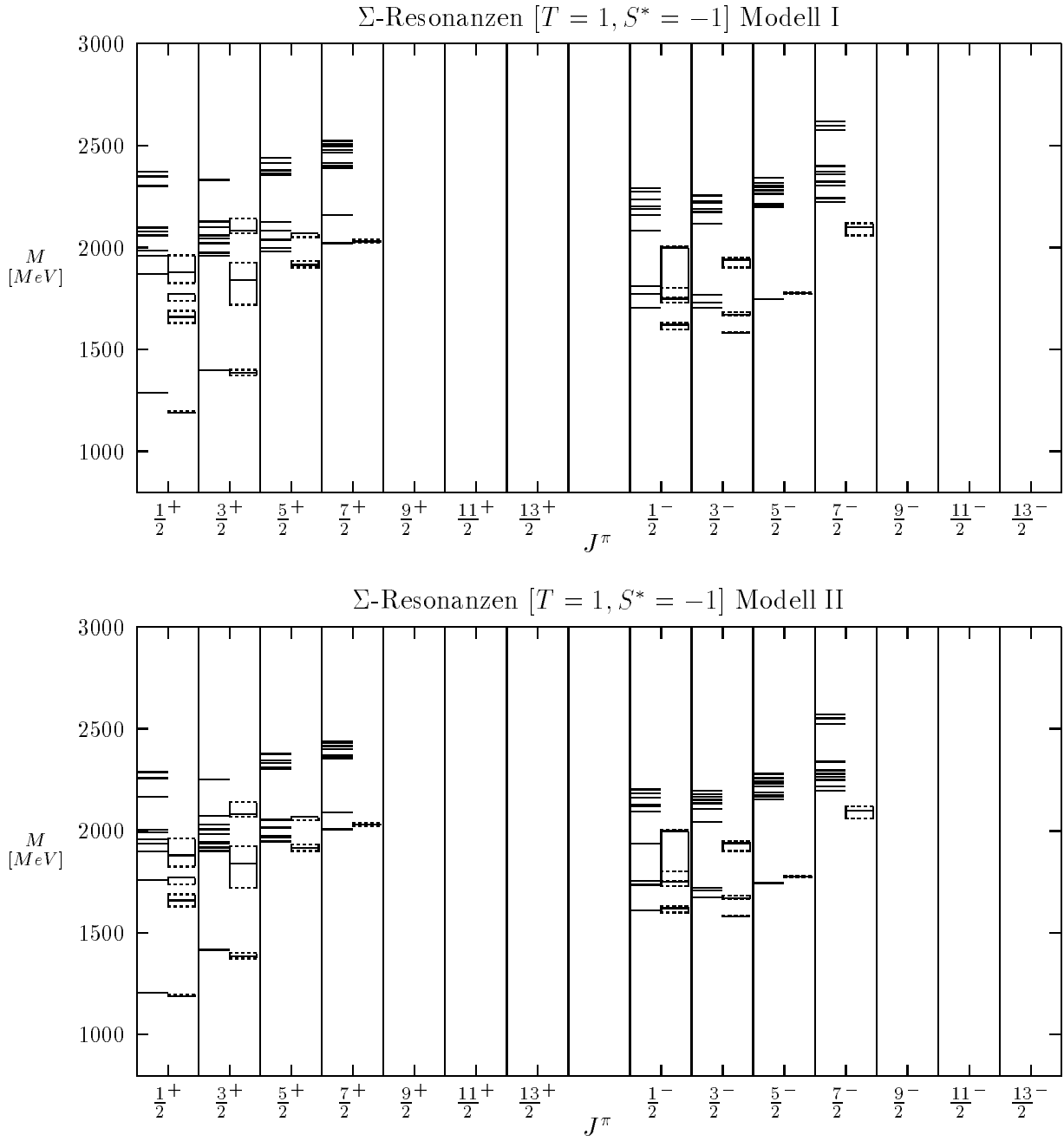


Abbildung 4.5: Das Σ -Resonanz-Spektrum. Zur Erläuterung siehe Beschriftung der Abbildung 4.2.

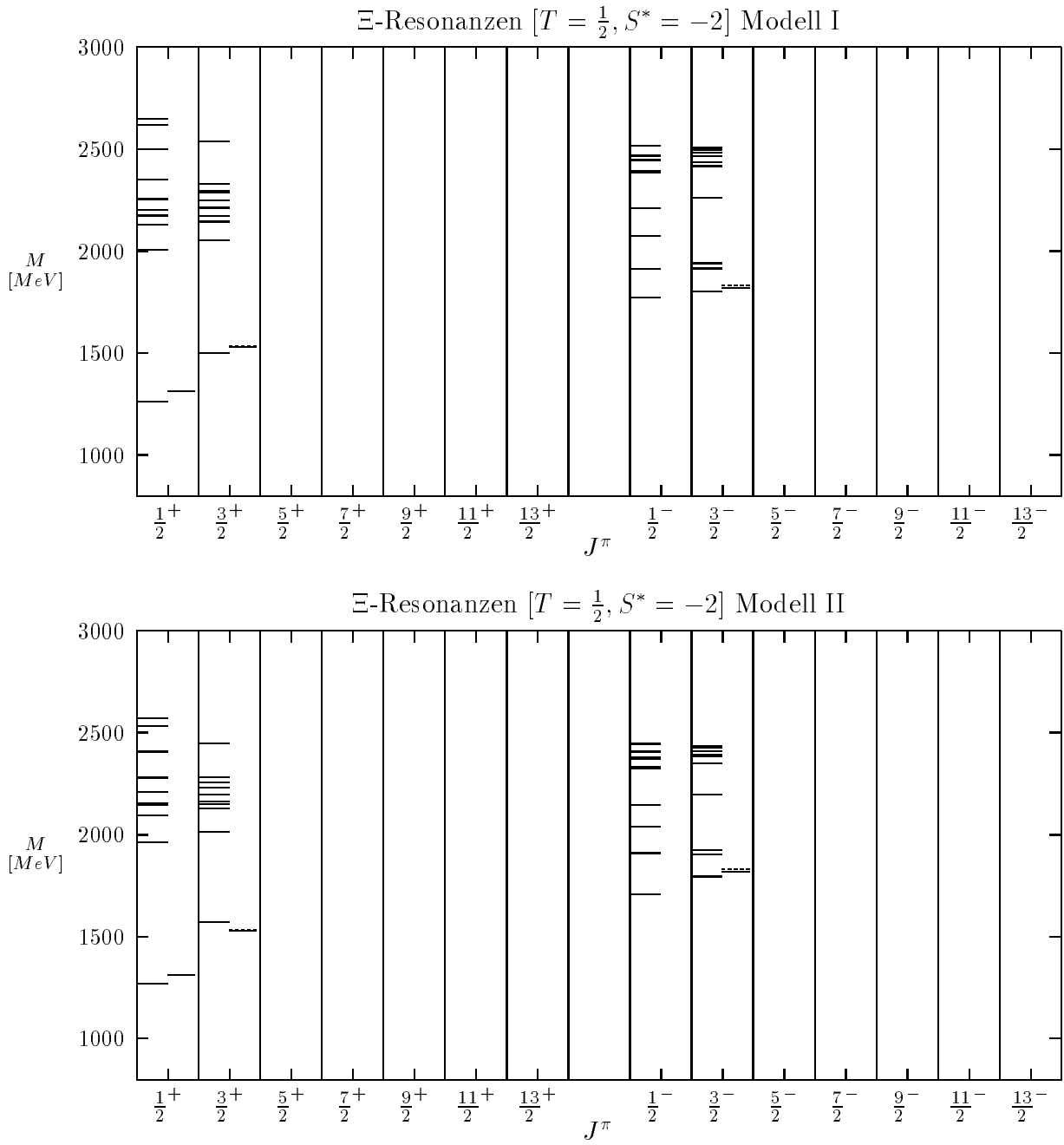


Abbildung 4.6: Das Ξ -Resonanz-Spektrum. Zur Erläuterung siehe Beschriftung der Abbildung 4.2.

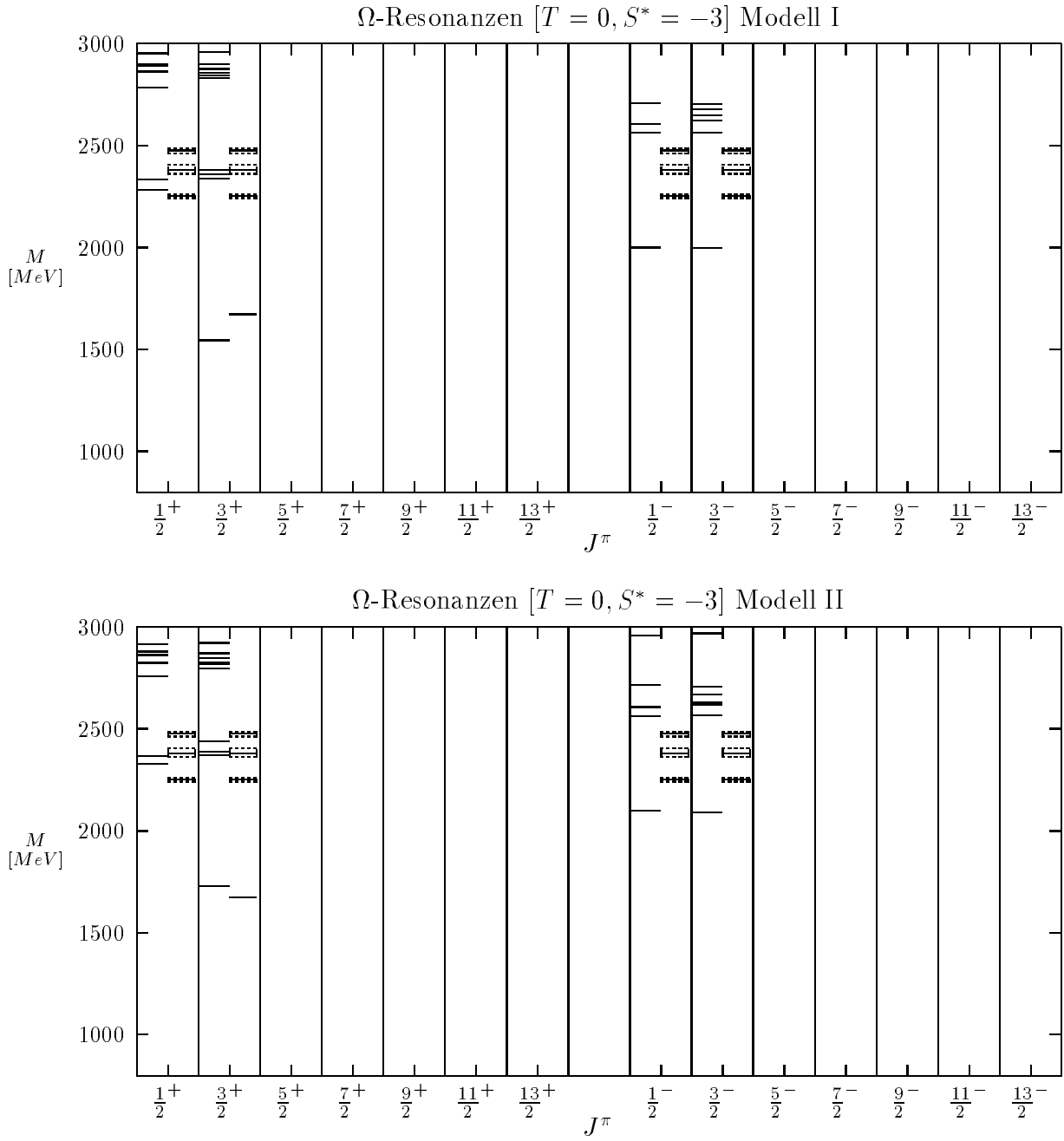


Abbildung 4.7: Das Ω -Resonanz-Spektrum. Zur Erläuterung siehe Beschriftung der Abbildung 4.2.

Wir fassen zusammen:

- Im nonstrange-Sektor liefern beide Modelle I und II etwa gleich gute Resultate. Dagegen schneidet das Modell I im strange-Sektor deutlich schlechter ab: Die Lage der Grundzustandsbaryonen, also insbesondere die Massenaufspaltung zwischen Oktett- und Dekuplett-Grundzuständen infolge der 't Hooftschen Kraft wird im Modell I falsch beschrieben. Diesbezüglich sind dagegen die Resultate des Modells II recht zufriedenstellend, die $\Delta - N$ -, $\Sigma - \Sigma^*$ -, $\Xi - \Xi^*$ - und $\Sigma - \Lambda$ -Aufspaltungen werden richtig wiedergegeben.
- Wir können in beiden Modellen die Roper-Resonanzen $N^{\frac{1}{2}+}(1440)$ und $\Lambda^{\frac{1}{2}+}(1600)$ in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment reproduzieren! Die Roper-Typ-Resonanz $\Sigma^{\frac{1}{2}+}(1660)$ wird um nur 100 MeV verfehlt.
- Durch relativistische Effekte sind die $1\hbar\omega$ -, $3\hbar\omega$ -, $5\hbar\omega$ -Schalen negativer Parität und die $2\hbar\omega$ -, $4\hbar\omega$ -Schalen positiver Parität in beiden Modellen im Vergleich zum nichtrelativistischen Quarkmodell stark abgesenkt, und ihre Lage entspricht im wesentlichen der experimentellen Situation.
- Angeregte Zustände mit hohen Drehimpulsen sind i.a. in guter Übereinstimmung mit dem Experiment und zeigen das korrekte Regge-Verhalten.
- Die $\Lambda^{\frac{1}{2}-}(1405)$ -Resonanz zeigt in beiden Modellen eine Absenkung gegenüber der $\Lambda^{\frac{3}{2}-}(1520)$ -Resonanz und verfehlt die experimentelle Resonanzposition um etwa nur 40 MeV.

4.3.2 Untersuchung der Instanton-induzierten Quark-Quark-Restwechselwirkung

Die Diskussion der Spektren im vorangegangenen Abschnitt hat für das Modell II folgendes gezeigt: Mit einem Confinement-Potential, welches eine solche Spinstruktur besitzt, daß Spin-Bahn- und Spin-Spin-Wechselwirkungen möglichst stark unterdrückt werden, können wesentliche im Abschnitt 4.1.1 aufgeführten Merkmale der Baryonspektren unter Hinzunahme der Instanton-induzierten Quark-Quark-Restwechselwirkung erklärt werden. Viele dieser Hauptmerkmale und Strukturen sind gerade durch die Wirkung der 't Hooftschen Wechselwirkung beschreibbar. Deshalb wollen wir in diesem Abschnitt die Bedeutung der 't Hooftschen Kraft und der von ihr beschriebenen Strukturen des Baryonspektrums gezielt studieren:

- Die Massenaufspaltungen zwischen Grundzustandsbaryonen des Dekupletts und des Oktetts mit gleichen Flavourinhalten (d.h. gleicher Strangeness S^*), also

$$\begin{aligned} N_{****}^{\frac{1}{2}+}(939) & - \Delta_{****}^{\frac{3}{2}+}(1232) \\ \Sigma_{****}^{\frac{1}{2}+}(1193) & - \Sigma_{****}^{*\frac{3}{2}+}(1385) \\ \Xi_{****}^{\frac{1}{2}+}(1318) & - \Xi_{****}^{*\frac{3}{2}+}(1530) \end{aligned}$$

sowie der $\Sigma_{****}^{\frac{1}{2}+}(1193) - \Lambda_{****}^{\frac{1}{2}+}(1116)$ -Aufspaltung im Baryonoktett.

- Die Absenkung der Roper-Resonanz $N_{****}^{\frac{1}{2}+}(1440)$, sowie der analogen Roper-Typ-Resonanzen $\Sigma_{***}^{\frac{1}{2}+}(1660)$ und $\Lambda_{***}^{\frac{1}{2}+}(1600)$ (und $\Xi_{***}^{??}(1950) = \Xi_{***}^{\frac{1}{2}+}(1950)$?).
- Die Absenkung der $\Lambda_{****}^{\frac{1}{2}-}(1405)$ -Resonanz gegenüber $\Lambda_{****}^{\frac{3}{2}-}(1520)$.

Wir wollen auch die Frage klären, warum im Modell I, welches für die 'Konstante' des Confinement-Potentials nicht die Projektor-Spin-Struktur benutzt, die Lage der Grundzustandsbaryonen und ihre relativen Massenaufspaltungen nicht richtig beschrieben werden. Wir werden deshalb beide Modelle in die Diskussion einbeziehen.

Die Lage der Grundzustandsbaryonen und ihre Aufspaltung

In den Abbildungen 4.8 und 4.9 haben wir die Lage der Grundzustandsbaryonen des **56**-pletts für die Modelle I und II in Abhängigkeit von den effektiven Kopplungsstärken g und g' der 't Hooftschen Wechselwirkung (mit dem fixierten, in beiden Modellen verwendeten Reichweiten-Parameter $\lambda=0.2$ fm) dargestellt.

A zeigt das Spektrum der Grundzustandsbaryonen unter Vernachlässigung der qq -Restwechselwirkung ($g = g' = 0$), also nur unter dem Einfluß des Confinementkernes und der kinetischen Energie. Zwischen A und B wird die effektive Kopplungsstärke g für das nonstrange-Diquark bis auf den in dem jeweiligen Modell verwendeten Wert heraufgefahren und das Spektrum in Abhängigkeit von g dargestellt. Die Kopplungsstärke g' für das strange-Diquark bleibt dabei auf $g' = 0$ fixiert. B zeigt dann das Spektrum der Grundzustandsbaryonen mit der in dem Modell verwendeten Kopplungsstärke g für nonstrange-Diquarks unter Vernachlässigung der Paarkraft auf die strange-Diquarks. Zwischen B und C wird dann die effektive Kopplungsstärke g' für das strange-Diquark bis auf den im Modell benutzten Wert variiert, wobei nun g fixiert bleibt. C zeigt schließlich das Spektrum der Grundzustandsbaryonen des jeweiligen Modells mit der vollen Instanton-induzierten qq -Restwechselwirkung.

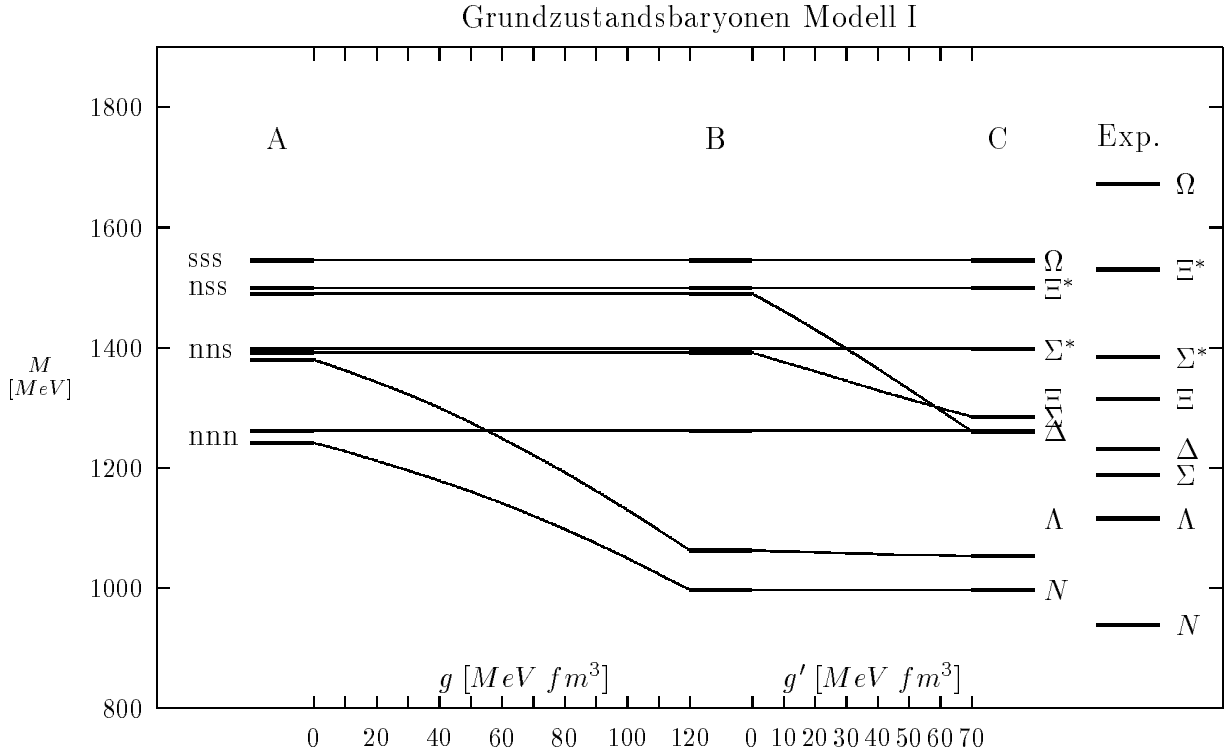


Abbildung 4.8: Die Wirkung der Instanton-induzierten qq -Restwechselwirkung auf das **56**-plett der Grundzustandsbaryonen im Modell I (siehe Beschreibung im Text)

Die Abbildungen zeigen deutlich, wie die 't Hooftsche Wechselwirkung die Struktur des Spektrums der Grundzustandsbaryonen prägt:

Wir betrachten zunächst einmal nur das Spektrum A, bei dem die Wirkung der Instanton-induzierten qq -Wechselwirkung vollständig vernachlässigt wird. Die Dynamik der Quarks wird nur durch das Confinement und die kinetische Energie bestimmt. Wie zu erwarten ist, sind die Grundzustandsbaryonen mit gleichen Quarkinhalten nnn, nns, nss bzw. sss, also sowohl Oktett- als auch Dekuplettzustände im wesentlichen entartet. Kleine Aufspaltungen innerhalb dieser Gruppierungen, wie beispielsweise zwischen Δ und N , sind auf relativistische Spin-Spin-Effekte zurückzuführen. Diese sind aufgrund der relativistischen Beschreibung des Confinements durch die Einbettungsoperatoren in unserem Modell enthalten und werden auf der Ebene der Pauli-Spinoren durch die Terme $g(\vec{p}_i; m_i) \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i$ (siehe Abschnitt 3.3.1) verursacht. Im nichtrelativistischen Limes, d.h. für große Massen m_n und m_s verschwinden diese Aufspaltungen wegen $g(\vec{p}_i; m_i) \rightarrow 0$ für $m_i \rightarrow 0$ (vergleiche Abb. 3.1) !

Im Modell II wird die explizite Flavour- $SU(3)$ -Brechung durch die schwerere s-Quarkmasse $m_s > m_u = m_d$ korrekt beschrieben: Die Massen der Grundzustandsbaryonen wachsen in etwa linear mit der Zahl der enthaltenen s-Quarks und die Größe der Aufspaltung entspricht im wesentlichen der experimentellen Massendifferenz der Dekuplettzustände von etwa 150 MeV.

Das Modell I beschreibt dagegen die Massenaufspaltung falsch: Die Abstände zwischen den Massen der Grundzustandsbaryonen mit verschiedenen s-Quarkinhalten ist nicht konstant, sondern wird mit wachsender Strangeness $|S^*|$ immer kleiner.

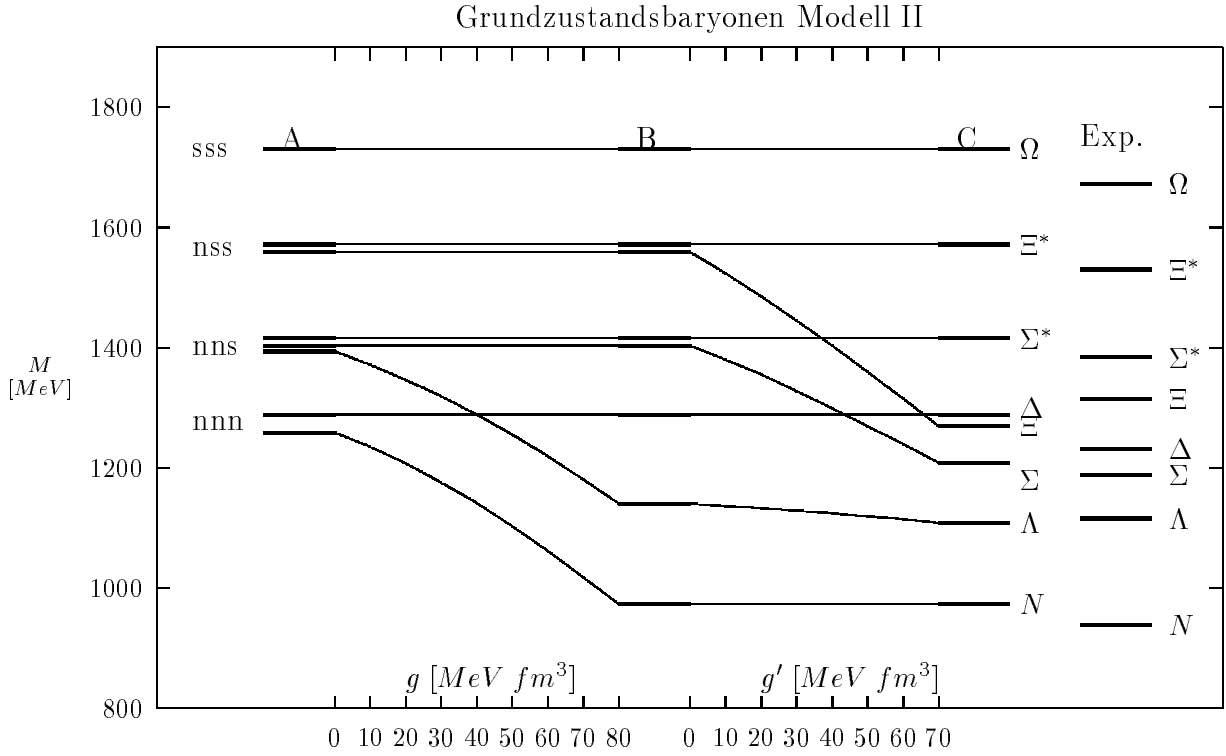


Abbildung 4.9: Die Wirkung der Instanton-induzierten qq -Restwechselwirkung auf das **56**-plett der Grundzustandsbaryonen im Modell II (siehe Beschreibung im Text)

	Modell I	Modell II	Experiment
nnn-nns	≈ 140	≈ 130	$\Delta_{\frac{3}{2}^{+}}^{*}(1232) - \Sigma_{\frac{3}{2}^{+}}^{*}(1385) = 153$
nns-nss	≈ 105	≈ 160	$\Sigma_{\frac{3}{2}^{+}}^{*}(1385) - \Xi_{\frac{3}{2}^{+}}^{*}(1530) = 145$
nss-sss	≈ 50	≈ 165	$\Xi_{\frac{3}{2}^{+}}^{*}(1530) - \Omega_{\frac{3}{2}^{+}}^{*}(1672) = 142$

Die Masse des $\Omega_{\frac{3}{2}^{+}}$ liegt daher um mehr als 100 MeV unter dem experimentell gemessenen Wert. Nur der Abstand zwischen dem nonstrange-Sektor nnn und nns wird richtig beschrieben. Dieser Sachverhalt muß eine Folge der speziellen Spinstruktur für die Konstante a_{qq} des Confinements von Modell I sein, da sich die Confinementpotentiale der beiden Modelle strukturell nur in diesem Punkt unterscheiden!

Wir betrachten nun, wie sich die Struktur dieses einfachen, durch das Confinement, die kinetische Energie und die Flavour- $SU(3)$ -Brechung geprägten Spektrums der Grundzustandsbaryonen unter dem Einfluß der Instanton-induzierten Restwechselwirkung verändert:

Nach Abschnitt 4.2.2, und wie die Abbildungen 4.8 und 4.9 auch zeigen, wirkt die qq -Restwechselwirkung nicht auf die Flavour-Dekuplettzustände, da die im 't Hooft-Wechselwirkungskern enthaltenen Flavour-Projektoren auf antisymmetrische Flavour-Antitriplettzustände projizieren. Das gesamte Spektrum der Δ - und Ω -Resonanzen und damit insbesondere die Grundzustandsbaryonen $\Delta_{\frac{3}{2}^{+}}^{*}(1232)$ und $\Omega_{\frac{3}{2}^{+}}^{*}(1672)$ in diesen Sektoren zeigen daher keine Instantoneffekte, sondern sie sind ausschließlich durch das Confinementpotential und die kinetische Energie bestimmt. Dasselbe gilt für die beiden anderen Dekuplett-Grundzustandsbaryonen $\Sigma^{*} = \Sigma_{\frac{3}{2}^{+}}^{*}(1385)$ und $\Xi^{*} = \Xi_{\frac{3}{2}^{+}}^{*}(1530)$.

Für die Flavour-Oktett-Grundzustandsbaryonen bewirkt die Instanton-induzierte Restwechselwirkung eine Absenkung der Massen gegenüber den Dekuplettzuständen, da sie Flavour-antisymmetrische Quarkpaare mit trivialem Spin (sogenannte Diquarks) besitzen.

Das Nukleon $N^{\frac{1}{2}+}(939)$ enthält entsprechend seinem Quarkinhalt nur nonstrange-Diquarks. Die Diquark-Korrelation und damit die Stärke der Absenkung gegenüber dem $\Delta^{\frac{3}{2}+}(1232)$ wird durch die Größe der effektiven Kopplungskonstante g beschrieben. Das $\Lambda^{\frac{1}{2}+}(1116)$ besitzt ebenfalls ein nonstrange-Diquark, darüberhinaus auch noch ein strange-Diquark, dessen Korrelation durch die effektive Kopplung g' beschrieben wird. Die Stärke der Absenkung gegenüber $\Sigma^* = \Sigma^{\frac{3}{2}+}(1385)$ ist daher durch beide Kopplungen g und g' gegeben. Die beiden übrigen Oktett-Grundzustände $\Sigma^{\frac{1}{2}+}(1193)$ und $\Xi^{\frac{1}{2}+}(1318)$ enthalten jeweils nur strange-Diquarks. Ihre Absenkung gegenüber den Dekuplettbaryonen Σ^* bzw. Ξ^* ist somit durch die effektive Kopplung g' bestimmt.

Abbildung 4.9 zeigt, daß im Modell II die Grundzustandsbaryonen Λ und N mit wachsender Kopplung g etwa gleich stark abgesenkt werden. Dieses Verhalten unterscheidet sich von dem aus dem nichtrelativistischen Quarkmodell bekannten Verhalten:

Lassen wir nämlich die Einbettungsoperatoren außer Betracht und benutzen für die Oktett-Grundzustände $|B\rangle = |N\rangle, |\Lambda\rangle, |\Sigma\rangle, |\Xi\rangle$ auf der Ebene der Pauli-Spinoren die Näherung

$$|B\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (|\chi_{M_S}\rangle |\phi_{M_S}\rangle + |\chi_{M_A}\rangle |\phi_{M_A}\rangle) |N=0; L=0\rangle, \quad (4.26)$$

mit den $SU(2)$ -Spinfunktionen $|\chi_M\rangle$, den $SU(3)$ -Flavourfunktionen $|\phi_M\rangle$, sowie der Grundzustands-Oszillatorfunktion $|N=0; L=0\rangle$, so rechnet man leicht nach, daß für die Matrixelemente des Operators $V_{\text{t Hooft}}^{(12)}$ gilt:

$$\langle N | V_{\text{t Hooft}}^{(12)} | N \rangle \sim \frac{1}{2} g \quad (4.27)$$

$$\langle \Lambda | V_{\text{t Hooft}}^{(12)} | \Lambda \rangle \sim \frac{1}{3} g + \frac{1}{6} g' \quad (4.28)$$

Für $g' = 0$ erwartet man entsprechend dieser Betrachtung im nichtrelativistischen Baryonmodell daher für das Nukleon N eine stärkere Absenkung als für Λ .

Für das in der Abbildung 4.9 gezeigte, von den Abschätzungen (4.27) und (4.28) abweichende Verhalten von N und Λ könnten zwei Aspekte wesentlich sein:

1. Der auf den 2er-Spinoren wirkende Operator $V_{\text{t Hooft}}^{(12)}$, den wir durch die Reduktion des 't Hooft-Wechselwirkungskernes mit Hilfe der Einbettungsmatrizen \mathcal{T}_i gemäß Gleichung (3.63) erhalten, wirkt natürlich nicht direkt auf die Baryonzustände $|B\rangle$; In Folge der Einbettungsoperation treten bei der Berechnung der Matrixelemente zusätzlich die Operatoren \mathcal{Q} auf, d.h. wir berechnen Ausdrücke der Form

$$\sum_{m,n} \mathcal{D}_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \gamma^5 \otimes \gamma^5 \otimes \mathbf{1}) \langle B | \mathcal{Q}_m^\dagger V_{\text{t Hooft}}^{(12)} \mathcal{Q}_n | B \rangle. \quad (4.29)$$

Erst im nichtrelativistischen Limes führt dieser Ausdruck für die Blöcke $++$ und $--$ auf das Matrixelement

$$\sum_{m,n} \mathcal{D}_{mn}^{\pm\pm} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \gamma^5 \otimes \gamma^5 \otimes \mathbf{1}) \langle B | \mathcal{Q}_m^\dagger V_{\text{t Hooft}}^{(12)} \mathcal{Q}_n | B \rangle \rightarrow \langle B | V_{\text{t Hooft}}^{(12)} | B \rangle, \quad (4.30)$$

bzw. für die Blöcke $+-$ und $-+$ auf Null.

2. In unserem kovarianten Salpeter-Baryonmodell enthält die Salpeter-Amplitude Komponenten positiver und negativer Energie. Unser Modell berücksichtigt daher Anteile der Instanton-induzierten Wechselwirkung, die in dem nichtrelativistischen Quarkmodell von vornherein durch die nichtrelativistische Reduktion vernachlässigt werden.

Der Vergleich von Modell II mit Modell I in diesem Zusammenhang zeigt, einen weiteren Aspekt der Wirkung der 't Hooftschen Kraft:

Sie ist explizit von der Art des Confinements abhängig. Während die Λ -Masse mit wachsendem g im Modell I etwa gleich stark abgesenkt wird wie im Modell II, ist die Absenkung der N -Masse wesentlich geringer als im Modell II. Dieses erklärt, warum im Modell I die effektive Kopplungskonstante $g = 120 \text{ MeV fm}^3$ wesentlich größer gewählt werden muß als im Modell II mit $g = 80 \text{ MeV fm}^3$, um die Masse des Nukleons einigermaßen an den experimentellen Wert anzupassen. Wie die Abbildung 4.8 zeigt, ist diese Wahl von g für die richtige Beschreibung der Λ -Masse viel zu groß, so daß im Modell I die Grundzustandsbaryonen Λ und N nicht konsistent beschrieben werden können.

Betrachten wir schließlich noch, wie sich die Struktur des Grundzustandspektrums mit wachsender Kopplung g' verändert:

Der im Λ vorhandene strange-Diquarkanteil bewirkt eine weitere Absenkung der Λ -Masse, die aber längst nicht so stark ist wie die Absenkung durch die nonstrange-Kopplung g , so wie man es auch von der naiven Abschätzung gemäß Gleichung (4.28) erwartet. Im Modell II bewirkt diese zusätzliche Absenkung für $g' = 70 \text{ MeV fm}^3$ die korrekte Anpassung an den experimentellen Wert der Λ -Masse.

Für die Absenkung der Grundzustandsbaryonen Σ und Ξ erhält man mit der Näherung (4.26) unter Vernachlässigung der Operatoren \mathcal{Q} die naive Abschätzung

$$\langle \Sigma | V_{\text{'t Hooft}}^{(12)} | \Sigma \rangle \sim \frac{1}{2} g' \quad (4.31)$$

$$\langle \Xi | V_{\text{'t Hooft}}^{(12)} | \Xi \rangle \sim \frac{1}{2} g' \quad (4.32)$$

Entsprechend dieser Abschätzung erwartet man im nichtrelativistischen Grenzfall für die Σ - und Ξ -Massen mit wachsender Kopplung g' eine gleichstarke Absenkung, die nach Gleichung (4.28) aber wesentlich größer als die Absenkung der Λ -Masse ist. Die Größe der experimentellen Massenaufspaltungen $\Sigma - \Sigma^* = 192 \text{ MeV}$ und $\Xi - \Xi^* = 212$ verlangt ebenfalls eine ungefähr gleiche Absenkung für Σ und Ξ .

Betrachten wir zunächst das Modell II (Abb. 4.9):

Die Absenkung der Ξ -Masse ist etwas stärker als die Absenkung der Σ -Masse. Für die effektive strange-Kopplungsstärke $g' = 70 \text{ MeV}$ erreicht man eine akzeptable Anpassung der Σ -Masse an den experimentellen Massenwert. Die Absenkung der Σ -Masse durch 't Hoofts Kraft entspricht nahezu dem experimentellen Wert der $\Sigma - \Sigma^*$ -Differenz. Mit dieser effektiven Kopplungsstärke ist die Absenkung der Ξ -Masse allerdings etwas zu stark und somit etwas größer als die experimentelle $\Xi - \Xi^*$ -Differenz; die Abweichung der Ξ -Masse vom experimentellen Wert bewegt sich aber in einem akzeptablen Rahmen und ist mit der Differenz zwischen den berechneten Massen der Dekuplett-Grundzustände und deren experimentellen Werten vergleichbar. Die im Modell II durch 't Hoofts Kraft resultierenden Absenkungen der Λ - und der Σ -Grundzustände gegenüber Σ^* führen zu einer korrekten $\Sigma - \Lambda$ -Differenz. Diese ist zwar etwas größer als die experimentell gemessene Differenz, vermutlich läßt sich aber durch eine kleine Variation der Modellparameter (insbesondere von g und g') eine bessere Übereinstimmung erzielen.

Im nichtrelativistischen Quarkmodell wird die Absenkung der Λ -Resonanz gegenüber der Σ -Resonanz folgendermaßen begründet:

Die 't Hooftsche Kraft hat für $g = g'$ nach den Abschätzungen (4.28) und (4.31) eine gleichstarke

Wirkung auf Λ und Σ , so daß in diesem Fall beide Zustände entartet sind. Erst die Wahl $g > g'$ der Kopplungsstärken bewirkt in dieser Betrachtung eine stärkere Absenkung der Λ -Resonanz und damit eine Aufspaltung $\Sigma - \Lambda$, da Σ kein nonstrange-Diquark enthält.

Abbildung 4.10 zeigt, daß diese Argumentation in unserer relativistischen Behandlung der Instanton-induzierten Restwechselwirkung so nicht mehr gültig ist. In der Abbildung sind die Massen von Λ und Σ in Abhängigkeit der Kopplungsstärken $g = g' = 0 \dots 70 \text{ MeV fm}^3$ dargestellt. Die Λ -Masse ist demnach bereits für $g = g'$ stärker abgesenkt, als die Σ -Masse. Diese

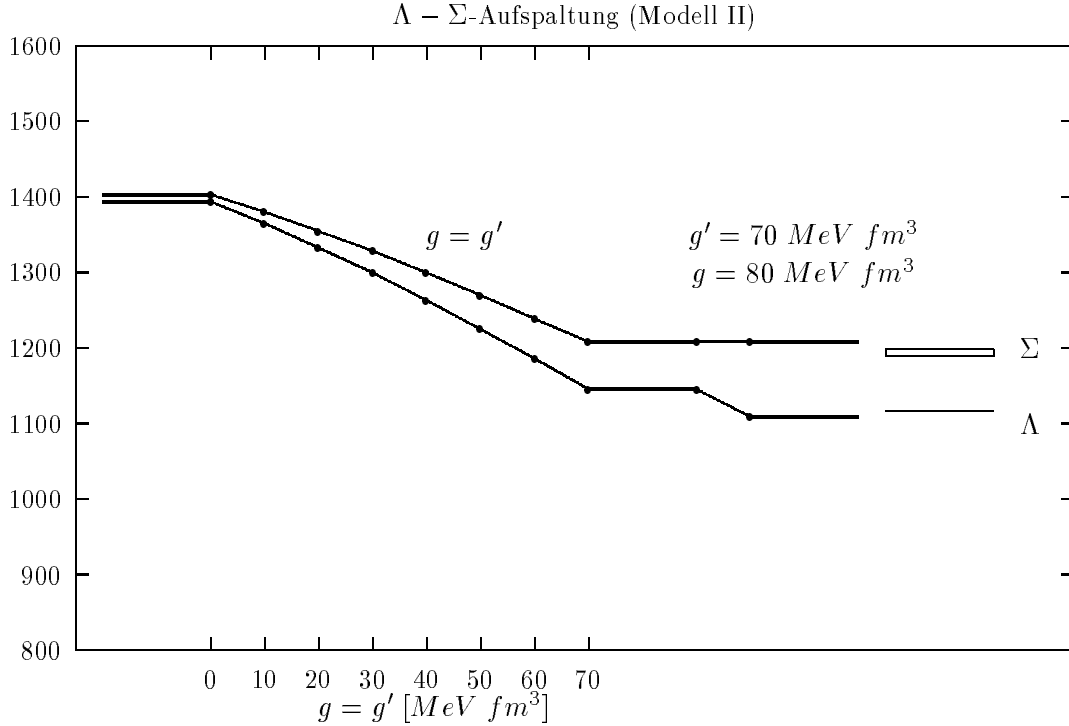


Abbildung 4.10: Die $\Sigma - \Lambda$ -Aufspaltung für verschiedene Kopplungsstärken g, g'

Absenkung ist aber für $g = g' = 70 \text{ MeV fm}^3$ noch nicht groß genug, um die $\Sigma - \Lambda$ -Aufspaltung quantitativ beschreiben zu können. Dafür muß in der Tat $g > g'$ gewählt werden. In der Diplomarbeit von R. Ricken [36] wird gezeigt, daß diese $\Sigma - \Lambda$ -Aufspaltung für $g = g' > 0$ von der Differenz der Quarkmassen m_n und m_s abhängig ist und für gleiche Massen $m_n = m_s$ verschwindet. Die Aufspaltung muß demnach eine Folge der Einbettungsoperation sein, da gerade die Einbettungsoperation in unserem Modell die Flavour- $SU(3)$ -Brechung beinhaltet. Die Abschätzungen (4.28) und (4.31) vernachlässigen aber die Einbettungsoperation, da sie nicht die Wirkung der massenabhängigen Operatoren \mathcal{Q} gemäß Gleichung (4.29) berücksichtigen.

Im Modell I führt die Wirkung der Instanton-induzierten qq -Restwechselwirkung nicht auf die gewünschten Absenkungen der Oktett-Grundzustandsbaryonen Σ und Ξ gegenüber den Dekuplett-Baryonen Σ^* und Ξ^* : Die Absenkung der Ξ -Masse mit wachsender Kopplungsstärke g' für das strange-Diquark ist etwa doppelt so stark wie bei der Σ -Masse. Während bei dem in Modell I letztendlich verwendeten Wert der Kopplungsstärke $g' = 70 \text{ MeV fm}^3$ die Absenkung der Σ -Masse noch längst nicht ausreicht, um eine akzeptable Anpassung an den experimentellen Wert der Σ -Masse zu erreichen, wird die $\Xi - \Xi^*$ -Differenz gerade richtig beschrieben. Die berechnete $\Sigma - \Sigma^*$ -Differenz beträgt gerade einmal die Hälfte des experimentellen Wertes.

Somit können im Modell I neben den Oktett-Grundzustandsbaryonen N und Λ ebenfalls die Grundzustände Σ und Ξ nicht konsistent durch die Instanton-induzierte qq -Restwechselwirkung beschrieben werden! Die Masse der Ξ -Resonanz liegt sogar unterhalb der Masse der Σ -Resonanz,

was ein unakzeptables Resultat des Modells I darstellt. Wegen der zu starken Absenkung der Λ -Masse durch die nonstrange-Kopplung g und der viel zu schwachen Absenkung der Σ -Masse durch die strange-Kopplung g' , ist ebenfalls die berechnete $\Sigma - \Lambda$ -Aufspaltung im Modell I unakzeptabel, da sie mehr als dreimal so groß wie der experimentelle Wert ist.

Dieses Ergebnis unterstreicht noch einmal den Aspekt, daß die Wirkung der 't Hooftschen Kraft insbesondere von der Art des gewählten Confinements abhängig ist. Dieser Aspekt schränkt natürlich die Möglichkeiten für die Parametrisierung des Confinements, also auch die Wahl der Dirac-Struktur (hier die Dirac-Struktur der 'Konstanten' a_{qq}) ein!

Die quantitativen Werte für die Absenkung $M(\text{ohne 't Hooft}) - M(\text{mit 't Hooft})$ der Oktett-Grundzustandsbaryonen durch die Instanton-induzierte Restwechselwirkung geben wir für beide Modelle in der folgenden Tabelle an; zum Vergleich sind die entsprechenden experimentellen Massendifferenzen zwischen den Oktett- und Dekuplett-Grundzustandsbaryonen angegeben.

Oktett-Baryon	Modell I	Modell II	Experiment
N	246 MeV	286 MeV	$N - \Delta = 293 \text{ MeV}$
Λ	327 MeV	284 MeV	$\Lambda - \Sigma^* = 269 \text{ MeV}$
Σ	106 MeV	195 MeV	$\Sigma - \Sigma^* = 192 \text{ MeV}$
Ξ	229 MeV	290 MeV	$\Xi - \Xi^* = 212 \text{ MeV}$

Für die $\Sigma - \Lambda$ -Massenaufspaltung ergeben die beiden Modelle folgende quantitativen Massendifferenzen:

$\Sigma - \Lambda$ (Modell I)	$\Sigma - \Lambda$ (Modell II)	$\Sigma - \Lambda$ (Experiment)
232 MeV	99 MeV	77 MeV

Wir fassen zusammen:

- Unsere bisherige Diskussion der Instanton-induzierten qq -Restwechselwirkung hat gezeigt, daß mit dem Modell II die Struktur des Spektrums der Grundzustandsbaryonen zufriedenstellend beschrieben werden kann. Zunächst beschreibt unter Vernachlässigung der Restwechselwirkung das Confinementpotential in der richtigen Weise die Flavour- $SU(3)$ -Brechung, also die korrekte lineare Aufspaltung zwischen den Grundzustands-Baryonen mit verschiedenem s-Quark-Inhalt.
Die 't Hooftsche Kraft, mit den in dem Modell II fixierten effektiven Kopplungsstärken, führt schließlich zu der korrekten Absenkung der Oktett-Grundzustandsbaryonen N , Λ , Σ und Ξ gegenüber den den Dekuplett-Zuständen Δ , Σ^* und Ξ^* .
Auch die $\Sigma - \Lambda$ -Aufspaltung wird vom Modell II zufriedenstellend reproduziert.
- Das Modell I liefert bzgl. der Grundzustandsbaryonen keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Das Confinementpotential allein beschreibt schon nicht in der richtigen Weise die Flavour- $SU(3)$ -Brechung; die Abstände zwischen den Grundzuständen verschiedener Strangeness sind nicht äquidistant!
Darüberhinaus bewirkt die Instanton-induzierte Restwechselwirkung nicht die korrekte Aufspaltung zwischen den Dekuplett- und Oktettzuständen. Für N und Σ ist die Wirkung von 't Hoofts Kraft im Vergleich zu den übrigen Oktettzuständen zu schwach, so daß keine konsistente Beschreibung der Oktett-Grundzustandsbaryonen gelingt.

Die Roper-Resonanzen

Die experimentellen Baryonspektren positiver Parität zeigen die Auffälligkeit, daß es für alle Flavours des Flavour-Oktetts einen tiefliegenden, angeregten Zustand mit den gleichen Quantenzahlen des Oktett-Grundzustandsbaryons gibt, der innerhalb, oder sogar unterhalb der ersten

Anregungszustände negativer Parität liegt:

Im Nukleon $N^{\frac{1}{2}+}$ -Sektor ist dieses der als **Roper-Resonanz** bekannte Zustand

$$N_{***}^{\frac{1}{2}+}(1440) .$$

Im $\Lambda^{\frac{1}{2}+}$ und $\Sigma^{\frac{1}{2}+}$ -Sektor findet man die analogen als **Roper-Typ-Resonanzen** bezeichneten Zustände

$$\Sigma_{***}^{\frac{1}{2}+}(1660) \quad \text{und} \quad \Lambda_{***}^{\frac{1}{2}+}(1600) .$$

Im $\Xi^{\frac{1}{2}+}$ -Sektor gibt es aufgrund lückenhafter Daten keinen experimentell evidenten Roper-Typ-Kandidaten, jedoch könnte der Zustand

$$\Xi_{***}^{??}(1950)$$

mit dem Status '***', aber unbekannten Quantenzahlen J^π ein solcher Kandidat für den Roper-Typ-Zustand im $\Xi^{\frac{1}{2}+}$ -Sektor sein.

Die Massendifferenz der Roper-Zustände zu den übrigen angeregten Zuständen des $2\hbar\omega$ -Bandes beträgt etwa 200 MeV. Im nichtrelativistischen Quarkmodell [22, 21] bewirkte die Instanton-induzierte Restwechselwirkung zwar eine selektive Absenkung eines Zustandes des $2\hbar\omega$ -Bandes um ungefähr diese Differenz von 150 MeV, jedoch lag in diesen Modellen das $2\hbar\omega$ -Band selbst um etwa 200 MeV zu hoch ('Roper-puzzle'), so daß das sogenannte 'Roper-Problem' im Rahmen eines nichtrelativistische Modells nicht gelöst werden konnte.

Wir werden nun dokumentieren, daß im Rahmen unseres kovarianten Salpeter-Baryon-Modells zumindest für die Resonanzen $N_{***}^{\frac{1}{2}+}(1440)$ und $\Lambda_{***}^{\frac{1}{2}+}(1600)$ das Roper-Problem unter Verwendung der 't Hooftschen Kraft als Restwechselwirkung gelöst werden kann. Für die Resonanz $\Sigma_{***}^{\frac{1}{2}+}(1660)$ erhalten wir zumindest ein besseres Resultat, als im nichtrelativistischen Quarkmodell.

Wir zeigen dazu in den Abbildungen 4.11 bis 4.14, wie sich die angeregten Zustände des $2\hbar\omega$ -Bandes in unserem Modell II unter der Wirkung von 't Hoofts Kraft, d.h. mit wachsenden effektiven Kopplungsstärken g bzw. g' verhalten. Zum Vergleich ist das im letzten Abschnitt diskutierte Verhalten der jeweiligen Oktett-Grundzustandsbaryonen ebenfalls dargestellt.

Wie wir bei der allgemeinen Diskussion der Baryon-Spektren in Abschnitt 4.3.1 bereits gesehen haben, haben wir nicht wie im nichtrelativistischen Quarkmodell das Problem, daß die $2\hbar\omega$ -Bänder zu tief liegen. Dieses ist von vornherein ein besserer Ausgangspunkt für die korrekte Beschreibung der Roper-Typ-Resonanzen.

Ohne die Wirkung der 't Hooftschen Kraft (d.h. $g = g' = 0$) werden die ersten angeregten Zustände durch diejenigen Baryonbasis-Zustände dominiert, die Oszillatorwellenfunktionen der Schale $N=2$ enthalten. Für den $N^{\frac{1}{2}+}$ -Sektor gibt es insgesamt vier, für die anderen betrachteten Sektoren jeweils sechs solcher total symmetrischen Baryonwellenfunktionen aus der Oszillator-Schale $N=2$. Je nach Maßgabe der Zahl flavour-antisymmetrischer Quarkpaare mit trivialem Spin (d.h. Spin-Flavour-Wellenfunktionen $(2S+1, F) = (2, \mathbf{8})$ mit $S_{ij} = 0$) hat die 't Hooftsche Kraft eine unterschiedliche Wirkung auf diese Zustände. Für die Resonanzen, die durch $(4, \mathbf{8})$ -Spin-Flavour-Zustände dominiert sind, hat die 't Hooftsche Wechselwirkung kaum einen Einfluß, dagegen erwartet man für Zustände die dominant aus $(2, \mathbf{8})$ -Zuständen zusammengesetzt sind eine starke Wirkung.

Die Abbildungen 4.11 bis 4.14 zeigen, das derjenige angeregte Zustand mit wachsender Kopplungsstärke g bzw. g' selektiv am stärksten durch die Restwechselwirkung abgesenkt wird, der schon ohne die Wirkung der Instanton-induzierten Restwechselwirkung, d.h. für $g = g' = 0$ am

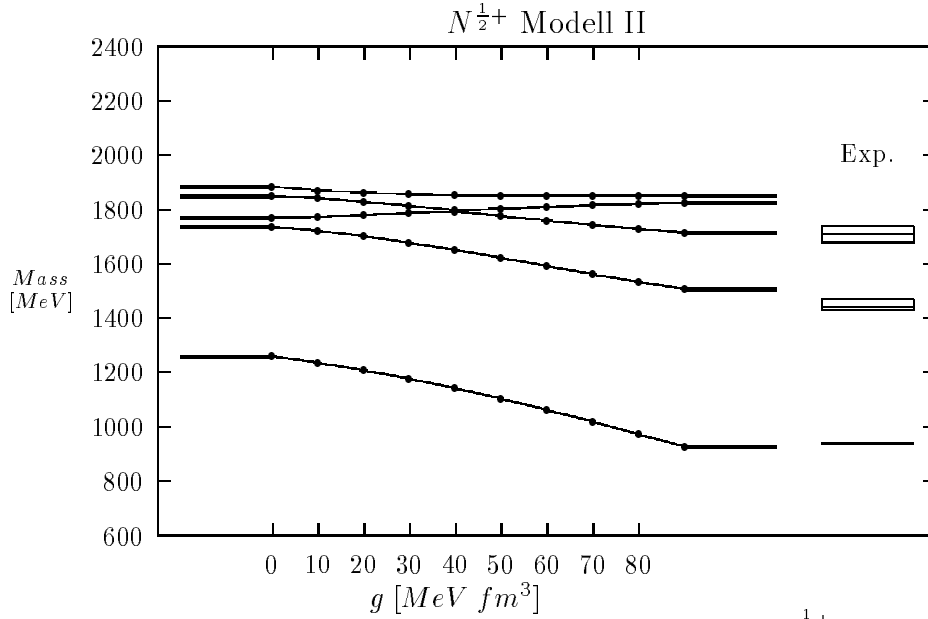


Abbildung 4.11: Die Absenkung der Roper-Resonanz $N_{1/2}^{+}(1440)$

tiefsten liegt. Die Absenkung dieses Zustandes ist dabei etwa genau so stark wie die Absenkung des entsprechenden Oktett-Grundzustandes. Bis auf die Resonanz $\Sigma_{1/2}^{+}(1660)$ sind Massen der Roper-Typ-Resonanzen, gerade dann zufriedenstellend an die experimentellen Massen-Werte angepaßt, wenn die Kopplungsstärken so gewählt sind, daß auch die entsprechenden Oktett-Grundzustände angepaßt sind. Mit den Kopplungsstärken $g = 80 \text{ MeV fm}^3$ und $g' = 70 \text{ MeV fm}^3$ können wir bis auf $\Sigma_{1/2}^{+}(1660)$ sämtliche Oktett-Grundzustandsbaryonen und Roper-Typ-Resonanzen an ihre experimentellen Massen zufriedenstellend anpassen. Die Abweichung der berechneten $\Sigma_{1/2}^{+}(1660)$ -Resonanzposition gegenüber dem experimentellen Wert beträgt etwa 100 MeV. Dieses Resultat stellt gegenüber dem dem Ergebnis des nichtrelativistischen Quarkmodells, in dem die Abweichung über 300 MeV betrug, zumindest einen Fortschritt dar! Wie in der Abbildung 4.14 zu sehen ist, sagt unser Modell auch im $\Xi_{1/2}^{+}$ -Sektor einen Roper-Typ-Zustand voraus. Dieser kann mit der Resonanz $\Xi_{1/2}^{+}(1950)$ identifiziert werden.

In den Sektoren $N_{1/2}^{+}$ und $\Lambda_{1/2}^{+}$ (siehe Abbildungen 4.11 und 4.12) fällt auf, daß in Folge der Instanton-induzierten Restwechselwirkung nicht nur ein Zustand, sonder in etwas schwächerer Weise ebenfalls ein zweiter angeregter Zustand abgesenkt wird. Gerade diese Absenkung in Folge der 't Hooftschen Kraft führt zu der richtigen Anpassung dieser Zustände an die experimentellen Massenwerte der Resonanzen $N_{1/2}^{+}(1710)$ und $\Lambda_{1/2}^{+}(1810)$.

Wir fassen zusammen:

- In jedem Sektor eines Oktett-Grundzustandsbaryons kann man infolge von Instantoneffekten die selektive Absenkung eines Zustands der $2\hbar\omega$ -Schale beobachten, die etwa so stark ist wie die Absenkung des Oktett-Grundzustands selbst. In den Sektoren $N_{1/2}^{+}$ und $\Lambda_{1/2}^{+}$ ist die Absenkung stark genug, um die Roper-Resonanzen $N_{1/2}^{+}(1440)$ und $\Lambda_{1/2}^{+}(1600)$ quantitativ richtig zu beschreiben. Die $\Sigma_{1/2}^{+}(1660)$ -Resonanz wird zwar um etwa 100 MeV verfehlt, aber auch dieses Ergebnis ist eine wesentliche Verbesserung gegenüber der nichtrelativistischen Anwendung der 't Hooftschen Kraft.
- In der nichtrelativistischen Anwendung der 't Hooftschen Wechselwirkung konnte das

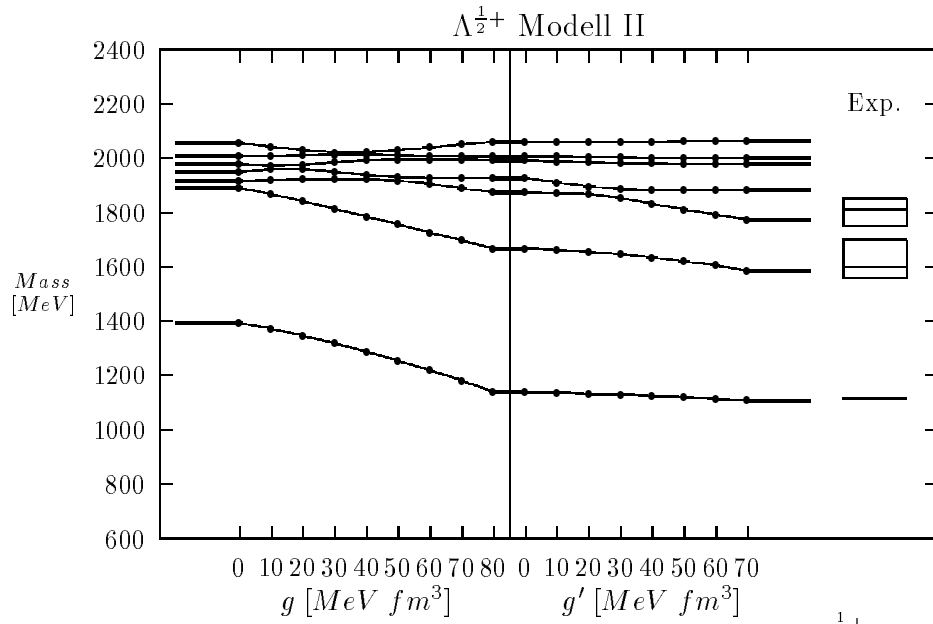


Abbildung 4.12: Die Absenkung der Roper-Typ-Resonanz $\Lambda_{\frac{1}{2}^+}^{***}(1600)$

'Roper-Problem' nur ansatzweise gelöst werden. Dieses Ergebnis macht deutlich, daß für die Beschreibung der Roper-Zustände als Instantoneffekt, relativistische Effekte eine ebenso wichtige Rolle spielen.

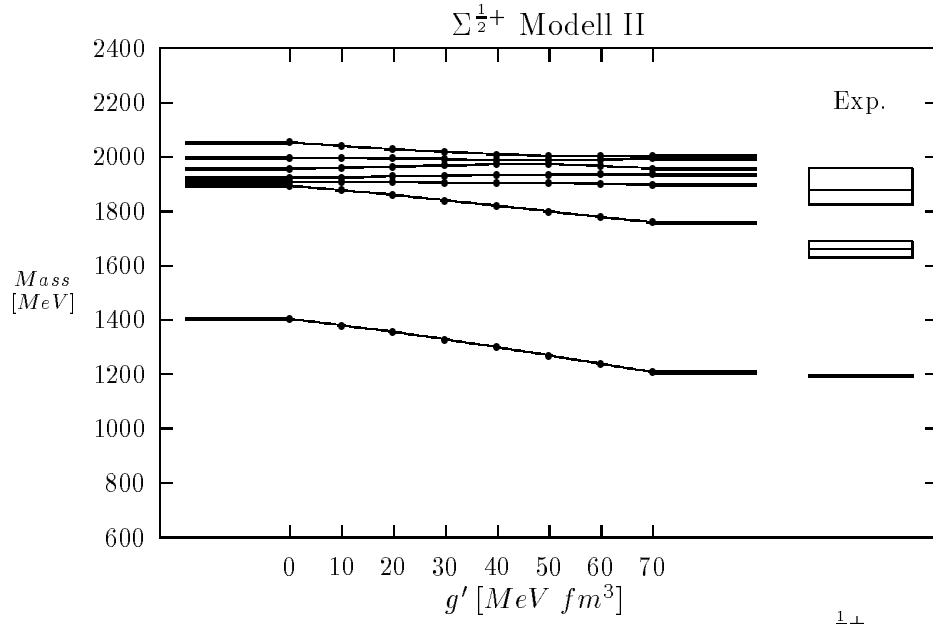


Abbildung 4.13: Die Absenkung der Roper-Typ-Resonanz $\Sigma_{***}^{\frac{1}{2}^+}(1660)$

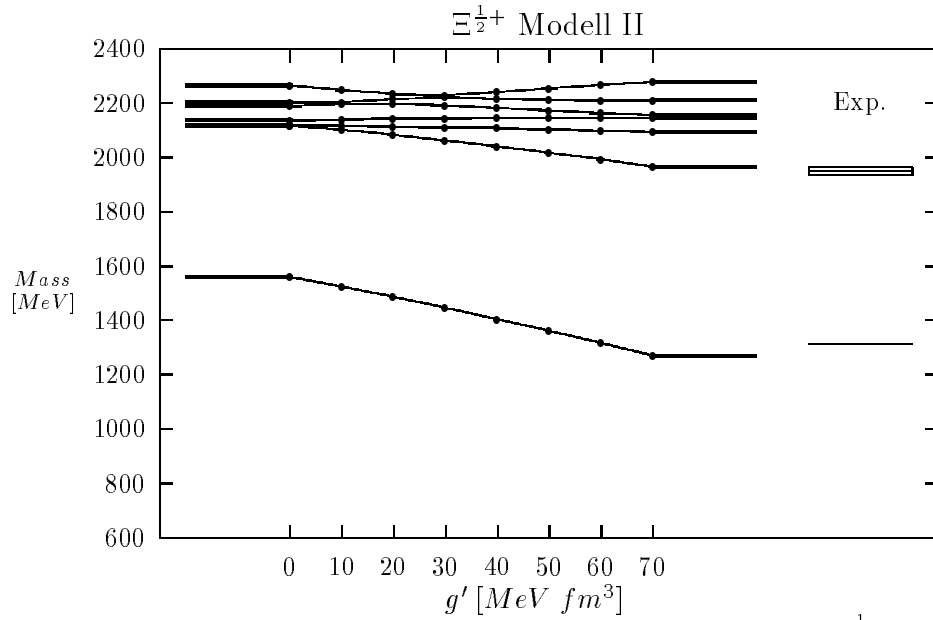


Abbildung 4.14: Die Absenkung der Roper-Typ-Resonanz im $\Xi_{\frac{1}{2}^+}$ -Sektor

Die Aufspaltung zwischen $\Lambda_{****}^{\frac{1}{2}-}(1405)$ und $\Lambda_{****}^{\frac{3}{2}-}(1520)$

Die $\Lambda^{\frac{1}{2}-}(1405)$ -Resonanz stellt bzgl. der in den Baryonspektren beobachteten Bandstrukturen (diese spiegeln die Entartung der Zustände mit aufeinanderfolgenden Drehimpulsen wieder) eine Ausnahme dar. Sie besitzt sogar eine niedrigere Anregungsenergie als die tiefsten nukleonischen Anregungszustände und ist der niedrigste Zustand negativer Parität überhaupt. Die tiefe Lage gegenüber der Resonanz $\Lambda^{\frac{3}{2}-}(1520)$ wird oft als Hinweis gedeutet, daß Spin-Bahn-Aufspaltungen, die aufgrund der signifikanten Drehimpulsentartung im Baryonspektrum eigentlich ausgeschlossen werden, unter Umständen doch einen starken Einfluß auf das Baryonspektrum haben könnten.

Wir haben bereits bei der Diskussion des Λ -Spektrums gesehen daß die Absenkung der $\Lambda^{\frac{1}{2}-}(1405)$ -Resonanz gegenüber $\Lambda^{\frac{3}{2}-}(1520)$ tendenziell von den Modellen I und II richtig beschrieben wird. Die Abweichung zur experimentellen Position beträgt etwa nur 40 MeV. Die Abbildung 4.15 zeigt, daß innerhalb unseres Modells diese Aufspaltung ebenfalls ein Instantoneffekt ist. In dem

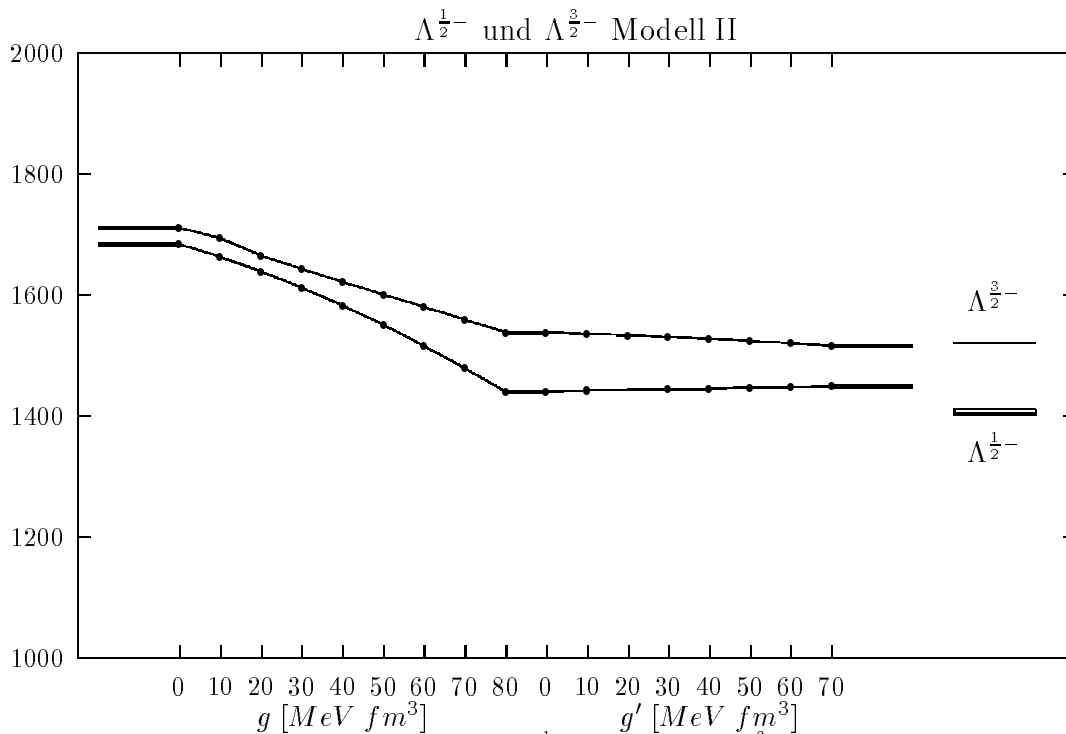


Abbildung 4.15: Die Aufspaltung zwischen $\Lambda_{****}^{\frac{1}{2}-}(1405)$ und $\Lambda_{****}^{\frac{3}{2}-}(1520)$ infolge der 't Hooft-schen Kraft

Bild ist dargestellt, wie sich (im Modell II) die Aufspaltung der beiden Zustände mit wachsenden Kopplungsstärken g (im linken Teil) bzw. g' (im rechten Teil) ändert. Für $g = g' = 0$ sind beide Zustände im wesentlichen entartet. Die 't Hooftsche Wechselwirkung senkt beide Zustände ab und bewirkt gleichzeitig die gewünschte Aufspaltung zwischen $\Lambda^{\frac{1}{2}-}(1405)$ und $\Lambda^{\frac{3}{2}-}(1520)$. Für die im Modell II verwendeten Kopplungsstärken $g = 80 \text{ MeV fm}^3$ und $g' = 70 \text{ MeV fm}^3$ führt die Absenkung der $\Lambda^{\frac{3}{2}-}$ -Resonanz zu einer guten Übereinstimmung mit dem Zustand $\Lambda^{\frac{3}{2}-}(1520)$. Die $\Lambda^{\frac{1}{2}-}(1405)$ -Resonanz wird um etwa 40 MeV verfehlt. Die Verwendung der 't Hooftschen Kraft in einem nichtrelativistischen Quarkmodell [23] konnte diese Aufspaltung nicht reproduzieren. Dies macht nochmals deutlich wie wichtig die Kovarianz für die Beschreibung von Instantoneffekten ist.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein relativistisches Quarkmodell für Baryonen untersucht, das auf der Bethe-Salpeter-Gleichung in instantaner Näherung beruht. Zur Modellierung des Confinements wurde ein linearer Potentialansatz gewählt, der mit einer Dirac-Struktur so versehen wurde, daß eine maximale Stabilität der Lösungsmannigfaltigkeit erreicht wurde und ebenfalls unerwünschte Spin-Bahn-Effekte beseitigt wurden.

Zur Beschreibung der Hyperfeinwechselwirkung (z.B. bei der $N - \Delta$ -Aufspaltung) wurde die 't Hooftsche, von Instantonen erzeugte effektive Restwechselwirkung benutzt, ein Ansatz, der sowohl in nichtrelativistischen Quarkmodellen für Baryonen [23, 21, 22], als auch in einem analogen relativistischen Modell für Mesonen [12, 12, 10, 11] erfolgreich getestet wurde.

Im Zentrum dieser Arbeit steht neben den theoretischen Grundlagen des Modells, das in dieser Form in der Literatur bisher nicht diskutiert wurde, der Effekt der 't Hooftschen Kraft. Als wesentliches Ergebnis erhielten wir, daß die Aufspaltung zwischen den Spin $\frac{1}{2}$ - und Spin $\frac{3}{2}$ -Grundzustandsbaryonen, die oft auf den Ein-Gluonaustausch zurückgeführt wird, ebenso durch die 't Hooftsche Kraft (in unserem Modell II) geleistet wird:

Es zeigte sich, daß durch 't Hoofts Kraft in Verbindung mit dem Confinement-Modell II, dessen konstanter Anteil eine Projektor-Spinstruktur besitzt, das Spektrum der Grundzustandsbaryonen in guter Übereinstimmung mit dem Experiment beschrieben werden kann. Die Aufspaltungen $N - \Delta$, $\Sigma - \Sigma^*$, $\Xi - \Xi^*$ zwischen dem Dekuplett und dem Oktett, sowie die $\Sigma - \Lambda$ -Differenz im Oktett wurden quantitativ richtig reproduziert. Das Modell I versagte dagegen diesbezüglich im strange-Sektor.

Neu ist in unserem Modell, daß dieselbe Kraft auch die Roper-artigen Zustände $N^{\frac{1}{2}+}(1440)$, $\Lambda^{\frac{1}{2}+}(1600)$ und $\Sigma^{\frac{1}{2}+}(1660)$ des Bayonspektrums quantitativ richtig beschreibt. Im nichtrelativistischen Quarkmodell konnte die Verwendung der 't Hooftschen Kraft das 'Roper-Problem' nur ansatzweise lösen. In beiden von uns vorgestellten Modellen I und II ist die Beschreibung der Resonanzen $N^{\frac{1}{2}+}(1440)$ und $\Lambda^{\frac{1}{2}+}(1600)$ in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment. Für die Resonanz $\Sigma^{\frac{1}{2}+}(1660)$ erreichen wir zumindest eine Verbesserung gegenüber dem nichtrelativistischen Modell. Ebenso wie die Roper-artigen Zustände konnte das nichtrelativistische Quarkmodell nicht die Lage der tiefliegenden $\Lambda^{\frac{1}{2}-}(1405)$ beschreiben. Die Aufspaltung zwischen den Resonanzen $\Lambda^{\frac{1}{2}-}(1405)$ und $\Lambda^{\frac{3}{2}-}(1520)$ wird oft als Hinweis gedeutet, daß Spin-Bahn-Wechselwirkungen unter Umständen doch einen Einfluß auf das Baryon-Spektrum haben könnten. Wir haben diesbezüglich gezeigt, daß auch dieses Phänomen allein durch die Wirkung der 't Hooftschen Kraft erklärt werden kann.

Weiterhin ist zu bemerken, daß aufgrund der Struktur unseres Confinementpotentials eine gute Beschreibung der Baryonen-Regge-Trajektorien gelingt.

Die Genauigkeit, mit der in diesem Modell die Salpeter-Gleichung gelöst wurde, ist allerdings noch verbesserungsfähig. Unser Lösungsverfahren ist durch die Wahl von endlich vielen Ba-

sisfunktionen, nach denen die Salpeter-Amplituden entwickelt werden, beschränkt und bei der bisher erzielten Genauigkeit von etwa 30 MeV durchaus noch zu verbessern. Dies wird sich insbesondere dann als notwendig erweisen, wenn unsere Amplituden zur Berechnung von elektroschwachen Eigenschaften und Zerfallsobservablen benutzt werden, was im nächsten Schritt beabsichtigt ist. Als Grundlage für solche Rechnungen soll insbesondere das Modell II zukünftig dienen.

Anhang A

6-Punkt-Greensfunktion und Bethe-Salpeter-Amplituden

A.1 Abseparation der 'Schwerpunktskoordinate'

Wir haben in den Gleichungen (1.33) und (1.34) die Bethe-Salpeter-Amplituden definiert als

$$\begin{aligned}\chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(x_1, x_2, x_3) &\equiv \langle 0 | T \Psi_\alpha^1(x_1) \Psi_\beta^2(x_2) \Psi_\gamma^3(x_3) | \bar{P} \rangle \\ \bar{\chi}_{\bar{P} \alpha' \beta' \gamma'}(x_1, x_2, x_3) &\equiv \langle \bar{P} | T \bar{\Psi}_{\alpha'}^1(x'_1) \bar{\Psi}_{\beta'}^2(x'_2) \bar{\Psi}_{\gamma'}^3(x'_3) | 0 \rangle\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

Wir wollen nun die triviale 'Schwerpunktskoordinate' $X = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ abspalten, um Amplituden $\chi_{P \alpha \beta \gamma}(\xi, \eta)$ und $\bar{\chi}_{P \alpha' \beta' \gamma'}(\xi', \eta')$ zu erhalten, die nur noch Funktionen der Relativkoordinaten $\xi = x_1 - x_2$ und $\eta = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2x_3)$ sind. Sei dazu $\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3$ der 4er-Impulsoperator mit Eigenzuständen $|P\rangle$ mit

$$\hat{P}|P\rangle = P|P\rangle \quad \hat{P}|0\rangle = 0 \quad (\text{A.2})$$

und $\Psi_\alpha^i(x_i)$ ein Fermionfeldoperator.

Dann gilt:

$$\Psi_\alpha^i(x_i + a) = e^{ia\hat{P}} \Psi_\alpha^i(x_i) e^{-ia\hat{P}} \quad (\text{A.3})$$

und damit

$$\begin{aligned}\chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(x_1, x_2, x_3) &= \langle 0 | T \Psi_\alpha^1(x_1) \Psi_\beta^2(x_2) \Psi_\gamma^3(x_3) | \bar{P} \rangle \\ &= \langle 0 | T e^{ia\hat{P}} \Psi_\alpha^1(x_1) e^{-ia\hat{P}} e^{ia\hat{P}} \Psi_\beta^2(x_2) e^{-ia\hat{P}} e^{ia\hat{P}} \Psi_\gamma^3(x_3) e^{-ia\hat{P}} e^{ia\hat{P}} | \bar{P} \rangle \\ &= \langle 0 | T \Psi_\alpha^1(x_1 + a) \Psi_\beta^2(x_2 + a) \Psi_\gamma^3(x_3 + a) | \bar{P} \rangle e^{ia\bar{P}}.\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

Setzt man nun $a \equiv -X = -\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ und benutzt die Gleichungen (1.14), so bekommt man:

$$\chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(x_1, x_2, x_3) = e^{-iX\bar{P}} \chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(\xi, \eta) \quad (\text{A.5})$$

mit

$$\chi_{\bar{P} \alpha \beta \gamma}(\xi, \eta) \equiv \langle 0 | T \Psi_\alpha^1\left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{3}\eta\right) \Psi_\beta^2\left(-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{3}\eta\right) \Psi_\gamma^3\left(\frac{2}{3}\eta\right) | \bar{P} \rangle. \quad (\text{A.6})$$

Entsprechend findet man für die adjungierte Bethe-Salpeter-Amplitude

$$\bar{\chi}_{\bar{P} \alpha' \beta' \gamma'}(x'_1, x'_2, x'_3) = e^{iX' \bar{P}} \bar{\chi}_{\bar{P} \alpha' \beta' \gamma'}(\xi', \eta') \quad (\text{A.7})$$

mit

$$\bar{\chi}_{\bar{P} \alpha' \beta' \gamma'}(\xi', \eta') \equiv \langle \bar{P} | T \bar{\Psi}_{\alpha'}^1(\frac{1}{2}\xi' + \frac{1}{3}\eta') \bar{\Psi}_{\beta'}^2(-\frac{1}{2}\xi' + \frac{1}{3}\eta') \bar{\Psi}_{\gamma'}^3(\frac{2}{3}\eta') | 0 \rangle. \quad (\text{A.8})$$

A.2 Minimum und Maximum dreier Zahlen

Das Minimum zweier Zahlen y und z kann dargestellt werden durch die Gleichung

$$\min(y, z) = \frac{1}{2}(y + z - |y - z|), \quad (\text{A.9})$$

und das Maximum dieser Zahlen durch

$$\max(y, z) = \frac{1}{2}(y + z + |y - z|). \quad (\text{A.10})$$

Durch wiederholte Anwendung von A.9 ergibt sich dann für das Minimum dreier Zahlen x, y, z :

$$\begin{aligned} \min(x, y, z) &= \min(x, \min(y, z)) \\ &= \frac{1}{2}[x + \min(y, z) - |x - \min(y, z)|] \\ &= \frac{1}{2}[x + \frac{1}{2}|y + z| - \frac{1}{2}|y - z| - |x - \frac{1}{2}(y + z - |y - z|)|]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Wir symmetrisieren Gleichung (A.11), indem wir über die Permutationen ($x \rightarrow y \rightarrow z$) den Mittelwert bilden und erhalten den symmetrischen Ausdruck:

$$\begin{aligned} \min(x, y, z) &= \frac{1}{3}[x + y + z \\ &\quad - \frac{1}{4}(|y - z| + |z - x| + |x - y|) \\ &\quad - \frac{1}{4}(|2x - y - z + |y - z|| \\ &\quad + |2y - z - x + |z - x|| \\ &\quad + |2z - x - y + |x - y||)]. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Entsprechend folgt aus (A.10) für das Maximum dreier Zahlen:

$$\begin{aligned} \max(x, y, z) &= \frac{1}{3}[x + y + z \\ &\quad + \frac{1}{4}(|y - z| + |z - x| + |x - y|) \\ &\quad + \frac{1}{4}(|2x - y - z - |y - z|| \\ &\quad + |2y - z - x - |z - x|| \\ &\quad + |2z - x - y - |x - y||)]. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

A.3 Die θ -Funktion in der Greensfunktion

Um aus der Greensfunktion den Anteil zu extrahieren, der die Propagation dreier Quarks $qqq \rightarrow qqq$ beschreibt, haben wir die Zeitordnung $x_1^0, x_2^0, x_3^0 > x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0$ fixiert, was zu einem Faktor $\theta(\min(x_1^0, x_2^0, x_3^0) - \max(x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0))$ führte (siehe Gleichung (1.30)).

Mit den Darstellungen für das Minimum (A.12) und das Maximum (A.13) dreier Zahlen in Anhang A.2 findet man in Jacobi-Koordinaten:

$$\min(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = X^0 - h(\xi^0, \eta^0) \quad (\text{A.14})$$

$$\max(x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0) = X'^0 + h(-\xi'^0, -\eta'^0) \quad (\text{A.15})$$

mit

$$\begin{aligned} h(\xi^0, \eta^0) \equiv & \frac{1}{12} \left\{ \left(|\eta^0 - \frac{1}{2}\xi^0| + |\eta^0 + \frac{1}{2}\xi^0| + |\xi| \right) \right. \\ & + \left| \eta^0 + \frac{3}{2}\xi^0 + |\eta^0 - \frac{1}{2}\xi^0| \right| \\ & + \left| \eta^0 - \frac{3}{2}\xi^0 + |\eta^0 + \frac{1}{2}\xi^0| \right| \\ & \left. + \left| |\xi^0| - 2\eta^0 \right| \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Für die Funktion θ in den Zeitvariablen gilt also

$$\theta(\min(x_1^0, x_2^0, x_3^0) - \max(x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0)) = \theta(X^0 - X'^0 - h(\xi^0, \eta^0) - h(-\xi'^0, -\eta'^0)). \quad (\text{A.17})$$

Benutzen wir nun noch die wohlbekannte Integraldarstellung der θ -Funktion

$$\theta(x^0) = \frac{-1}{2\pi i} \int dp^0 \frac{e^{-i p^0 x^0}}{p^0 + i\epsilon}, \quad (\text{A.18})$$

so bekommen wir schließlich

$$\theta(\min(x_1^0, x_2^0, x_3^0) - \max(x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0)) = \frac{-1}{2\pi i} \int d\tilde{P}^0 \frac{e^{-i \tilde{P}^0 (X^0 - X'^0 - h(\xi^0, \eta^0) - h(-\xi'^0, -\eta'^0))}}{\tilde{P}^0 + i\epsilon}. \quad (\text{A.19})$$

A.4 Der Zusammenhang zwischen Bethe-Salpeter-Amplituden und der Greensfunktion im Impulsraum

Mit der Gleichung (1.35) im Abschnitt 1.2 haben wir den Zusammenhang zwischen den Salpeter-Amplituden $\chi_{\bar{P}}$ und $\bar{\chi}_{\bar{P}}$ und der Greensfunktion G im Ortsraum gefunden:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3') = \\ - \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3 2\omega_P} \chi_{\bar{P} \alpha\beta\gamma}(x_1, x_2, x_3) \bar{\chi}_{\bar{P} \alpha'\beta'\gamma'}(x_1', x_2', x_3') \\ \times \theta(\min(x_1^0, x_2^0, x_3^0) - \max(x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0)) \\ + \text{Terme, die nicht von gebundenen } qqq\text{-Zuständen der Masse } M \text{ herrühren.} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Wir wollen an dieser Stelle herleiten, wie sich dieser Zusammenhang im Impulsraum darstellt. Für eine kompaktere Schreibweise lassen wir sämtliche Indizes fort und benutzen die Notation:

$$\left[\chi_{\bar{P}}(p_{\xi}, p_{\eta}) \bar{\chi}_{\bar{P}}(p'_{\xi}, p'_{\eta}) \right]_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'} \equiv \chi_{\bar{P} \alpha\beta\gamma}(p_{\xi}, p_{\eta}) \bar{\chi}_{\bar{P} \alpha'\beta'\gamma'}(p'_{\xi}, p'_{\eta}) \quad (\text{A.21})$$

Setzen wir in (A.20) das Resultat (A.19) aus Anhang A.3

$$\theta(\min(x_1^0, x_2^0, x_3^0) - \max(x_1'^0, x_2'^0, x_3'^0)) = \frac{-1}{2\pi i} \int d\tilde{P}^0 \frac{e^{-i\tilde{P}^0(X^0 - X'^0 - h(\xi^0, \eta^0) - h(-\xi'^0, -\eta'^0))}}{\tilde{P}^0 + i\epsilon} \quad (\text{A.22})$$

und die 'schwerpunktseparierten' Bethe-Salpeter Amplituden (A.5) und (A.7) aus Anhang A.1

$$\chi_{\bar{P}}(x_1, x_2, x_3) = e^{-iX\bar{P}} \chi_{\bar{P}}(\xi, \eta) \quad \text{und} \quad \bar{\chi}_{\bar{P}}(x'_1, x'_2, x'_3) = e^{iX'\bar{P}} \bar{\chi}_{\bar{P}}(\xi', \eta') \quad (\text{A.23})$$

ein, so findet man nach Substitution der Integrationsvariablen $\tilde{P}^0 \rightarrow P^0 \equiv (\tilde{P}^0 - \omega_P)$:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) &= -i \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} e^{-iP(X-X')} \frac{1}{2\omega_P} \frac{\chi'_P(\xi, \eta) \bar{\chi}_P(\xi', \eta')}{P^0 - \omega_P + i\epsilon} \\ &\quad + \text{reguläre Terme für } P^0 \rightarrow \omega_P, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

wobei die gestrichenen Amplituden

$$\chi'_P(\xi, \eta) \equiv e^{i(P^0 - \omega_P)h(\xi^0, \eta^0)} \chi_P(\xi, \eta) \quad (\text{A.25})$$

$$\bar{\chi}_P(\xi', \eta') \equiv e^{i(P^0 - \omega_P)h(-\xi'^0, -\eta'^0)} \bar{\chi}_{\bar{P}}(\xi', \eta') \quad (\text{A.26})$$

im Grenzfall $P^0 \rightarrow \omega_P$ mit den Salpeter-Amplituden $\chi_{\bar{P}}$ und $\bar{\chi}_{\bar{P}}$ identisch sind ! Verwenden wir nun noch die Definitionen (1.38) und (1.39) für die Fouriertransformierten der Bethe-Salpeter-Amplituden

$$\chi_P(\xi, \eta) \equiv \int \frac{d^4 p_{\xi}}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_{\eta}}{(2\pi)^4} e^{-ip_{\xi}\xi} e^{-ip_{\eta}\eta} \chi_{\bar{P}}(p_{\xi}, p_{\eta}) \quad (\text{A.27})$$

$$\bar{\chi}_P(\xi', \eta') \equiv \int \frac{d^4 p'_{\xi}}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_{\eta}}{(2\pi)^4} e^{ip'_{\xi}\xi'} e^{ip'_{\eta}\eta'} \bar{\chi}_{\bar{P}}(p'_{\xi}, p'_{\eta}) \quad (\text{A.28})$$

sowie die Definition der Fouriertransformierten der Greenschen Funktion (1.18), so erhalten wir das Resultat

$$\begin{aligned} G_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(P, p_{\xi}, p_{\eta}, p'_{\xi}, p'_{\eta}) &= \frac{-i}{2\omega_P} \frac{\chi_{\bar{P} \alpha\beta\gamma}(p_{\xi}, p_{\eta}) \bar{\chi}_{\bar{P} \alpha'\beta'\gamma'}(p'_{\xi}, p'_{\eta})}{P^0 - \omega_P + i\epsilon} \\ &\quad + \text{reguläre Terme für } P^0 \rightarrow \omega_P. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Dieses läßt sich noch durch eine einfache Rechnung in eine kovariante Form bringen:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\alpha' \beta\beta' \gamma\gamma'}(P, p_{\xi}, p_{\eta}, p'_{\xi}, p'_{\eta}) &= -i \frac{\chi_{\bar{P} \alpha\beta\gamma}(p_{\xi}, p_{\eta}) \bar{\chi}_{\bar{P} \alpha'\beta'\gamma'}(p'_{\xi}, p'_{\eta})}{P^2 - M^2 + i\epsilon} \\ &\quad + \text{reguläre Terme für } P^2 \rightarrow M^2. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Anhang B

Die Salpeter-Gleichung

B.1 Herleitung der Salpeter-Gleichung

Wir gehen aus von der 3-Fermionen-Bethe-Salpeter-Gleichung (2.2) im Ruhesystem des gebundenen Zustands $\vec{P} = (M, \vec{0}) \equiv M$ mit einem instantanen irreduziblen 3-Fermionen-Wechselwirkungskern V und freien Quarkpropagatoren S_i^F :

$$\begin{aligned}\chi_M(p_\xi, p_\eta) &= S_1^F\left(\frac{1}{3}M + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_2^F\left(\frac{1}{3}M - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_3^F\left(\frac{1}{3}M - p_\eta\right) \\ &\quad \times (-i) \int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_\eta}{(2\pi)^4} V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \chi_M(p'_\xi, p'_\eta) \\ &= S_1^F\left(\frac{1}{3}M + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_2^F\left(\frac{1}{3}M - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_3^F\left(\frac{1}{3}M - p_\eta\right) \\ &\quad \times (-i) \int \frac{d^3 p'_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\eta}{(2\pi)^3} V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \Phi(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta)\end{aligned}\tag{B.1}$$

mit

$$\Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \equiv \int \frac{dp_\xi^0}{2\pi} \frac{dp_\eta^0}{2\pi} \chi_{\vec{P}}\left((p_\xi^0, \vec{p}_\xi), (p_\eta^0, \vec{p}_\eta)\right) |_{\vec{P}=(M, \vec{0})} .\tag{B.2}$$

Da der Wechselwirkungskern V nicht mehr explizit von den Relativenergien abhängt, konnte hier die p_ξ^0, p_η^0 -Integration auf die Amplitude χ_M gezogen werden und führte zur Definition (B.2) der Salpeter-Amplitude.

Die p_ξ^0, p_η^0 -Abhängigkeit der Bethe-Salpeter-Amplitude steckt jetzt nur noch in den freien Quarkpropagatoren S_i^F auf der rechten Seite der Gleichung (B.1). Um nun diese p_ξ^0, p_η^0 -Abhängigkeit zu eliminieren und letztendlich eine Gleichung für die Salpeter-Amplitude Φ zu erhalten, wird die gesamte Gleichung über p_ξ^0 und p_η^0 integriert:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) &= -i \left(\int \frac{dp_\xi^0}{2\pi} \frac{dp_\eta^0}{2\pi} S_1^F\left(\frac{1}{3}M + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_2^F\left(\frac{1}{3}M - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_3^F\left(\frac{1}{3}M - p_\eta\right) \right) \\ &\quad \times \int \frac{d^3 p'_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\eta}{(2\pi)^3} V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \Phi(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) .\end{aligned}\tag{B.3}$$

Die p_ξ^0, p_η^0 -Integration über die freien Quarkpropagatoren $S_1^F S_2^F S_3^F$ kann mit Hilfe des Residuensatzes analytisch ausgeführt werden. Dazu benutzen wir folgende Darstellung der freien Fermionpropagatoren (siehe z.B. [19]):

$$S_i^F(p_i) = \frac{i}{\gamma(p_i) - m_i + i\epsilon}$$

$$= i \left(\frac{1}{p_i^0 - \omega_i + i\epsilon} \Lambda_i^+(\vec{p}_i) + \frac{1}{p_i^0 + \omega_i - i\epsilon} \Lambda_i^-(\vec{p}_i) \right) \gamma^0, \quad (\text{B.4})$$

wobei

$$\Lambda_i^\pm(\vec{p}_i) \equiv \frac{\omega_i \pm H_i(\vec{p}_i)}{2\omega_i}$$

mit

$$\omega_i = \omega_i(\vec{p}_i) \equiv \sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m_i^2} \quad \text{und} \quad H_i(\vec{p}_i) \equiv \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{p}_i + m_i) = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_i + \beta m_i.$$

Die $\Lambda_i^\pm(\vec{p}_i)$ sind Projektionsoperatoren auf die Lösungen positiver bzw. negativer Energie $\pm\omega_i$ der freien Dirac-Gleichung im Impulsraum. Eigenschaften dieser Projektoren sind in den Gleichungen (C.11) bis (C.15) in Anhang C zu finden.

Ausmultiplikation von

$$-i S_1^F(p_1) \otimes S_2^F(p_2) \otimes S_3^F(p_3) \quad (\text{B.5})$$

liefert dann die acht Summanden

$$\frac{\Lambda_1^{(\pm)_1}(\vec{p}_1) \otimes \Lambda_2^{(\pm)_2}(\vec{p}_2) \otimes \Lambda_3^{(\pm)_3}(\vec{p}_3) \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0}{(p_1^0 - (\pm)_1 \omega_1 + (\pm)_1 i\epsilon) (p_2^0 - (\pm)_2 \omega_2 + (\pm)_2 i\epsilon) (p_3^0 - (\pm)_3 \omega_3 + (\pm)_3 i\epsilon)}, \quad (\text{B.6})$$

von denen nach Integration über p_ξ^0 und p_η^0 mittels Residuensatzes nur die Terme mit $\Lambda_1^+ \otimes \Lambda_2^+ \otimes \Lambda_3^+$ und $\Lambda_1^- \otimes \Lambda_2^- \otimes \Lambda_3^-$ von Null verschieden sind:

$$\begin{aligned} & -i \left(\int \frac{dp_\xi^0}{2\pi} \frac{dp_\eta^0}{2\pi} S_1^F\left(\frac{1}{3}M + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_2^F\left(\frac{1}{3}M - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_3^F\left(\frac{1}{3}M - p_\eta\right) \right) \\ &= \left[\frac{\Lambda_1^+ \otimes \Lambda_2^+ \otimes \Lambda_3^+}{M - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + i\epsilon} + \frac{\Lambda_1^- \otimes \Lambda_2^- \otimes \Lambda_3^-}{M + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - i\epsilon} \right] \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Damit erhalten wir die Salpeter-Gleichung wie in Gleichung (2.8) angegeben, also

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) &= \left[\frac{\Lambda_1^+ \otimes \Lambda_2^+ \otimes \Lambda_3^+}{M - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + i\epsilon} + \frac{\Lambda_1^- \otimes \Lambda_2^- \otimes \Lambda_3^-}{M + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - i\epsilon} \right] \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \\ &\times \int \frac{d^3 p'_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\eta}{(2\pi)^3} V(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, \vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \Phi(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

B.2 Der Zusammenhang zwischen der Salpeter-Amplitude Φ und ihrer Adjungierten $\bar{\Phi}$

Durch Integration über die Relativenergien im Ruhesystem des gebundenen Zustands werden die Bethe-Salpeter-Amplitude χ_M und ihre Adjungierte $\bar{\chi}_M$ auf die Salpeter-Amplituden

$$\Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \equiv \int \frac{dp_\xi^0}{2\pi} \frac{dp_\eta^0}{2\pi} \chi_{\vec{P}} \left((p_\xi^0, \vec{p}_\xi), (p_\eta^0, \vec{p}_\eta) \right) |_{\vec{P}=(M, \vec{0})} \quad (\text{B.9})$$

$$\text{und } \bar{\Phi}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \equiv \int \frac{dp_\xi^0}{2\pi} \frac{dp_\eta^0}{2\pi} \bar{\chi}_{\vec{P}} \left((p_\xi^0, \vec{p}_\xi), (p_\eta^0, \vec{p}_\eta) \right) |_{\vec{P}=(M, \vec{0})} \quad (\text{B.10})$$

reduziert. Mit diesen Definitionen und den Definitionen (1.38) der Fouriertransformierten von χ und $\bar{\chi}$ bekommen wir im Ortsraum die Salpeter-Amplitude

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{\xi}, \vec{\eta}) &\equiv \int \frac{d^3 p'_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\eta}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}'_\xi \vec{\xi}} e^{i\vec{p}'_\eta \vec{\eta}} \Phi(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) = \int \frac{d^4 p'_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_\eta}{(2\pi)^4} e^{-ip'_\xi{}^0 + i\vec{p}'_\xi \vec{\xi}} e^{-ip'_\eta{}^0 + i\vec{p}'_\eta \vec{\eta}} \Phi(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) \\ &= \chi_M \left((0, \vec{\xi}), (0, \vec{\eta}) \right)\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

und entsprechend die adjungierte Salpeter-Amplitude

$$\bar{\Phi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \equiv \int \frac{d^3 p'_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_\eta}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}'_\xi \vec{\xi}} e^{i\vec{p}'_\eta \vec{\eta}} \bar{\Phi}(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta) = \bar{\chi}_M \left((0, \vec{\xi}), (0, \vec{\eta}) \right). \quad (\text{B.12})$$

Die Salpeter-Amplituden im Ortsraum werden deshalb auch als 'equal-time'-Bethe-Salpeter-Amplituden bezeichnet.

Mit der Definition (1.37) der 'schwerpunktseparierten' BS-Amplituden folgt dann¹:

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \langle 0 | \Psi_\alpha^1(0, \frac{1}{2}\vec{\xi} + \frac{1}{3}\vec{\eta}) \Psi_\beta^2(0, -\frac{1}{2}\vec{\xi} + \frac{1}{3}\vec{\eta}) \Psi_\gamma^3(0, \frac{2}{3}\vec{\eta}) | M \rangle \quad (\text{B.13})$$

und

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) &= \langle M | \bar{\Psi}_\alpha^1(0, \frac{1}{2}\vec{\xi} + \frac{1}{3}\vec{\eta}) \bar{\Psi}_\beta^2(0, -\frac{1}{2}\vec{\xi} + \frac{1}{3}\vec{\eta}) \bar{\Psi}_\gamma^3(0, \frac{2}{3}\vec{\eta}) | 0 \rangle \\ &= \langle M | \Psi_{\alpha'}^{1\dagger}(0, \frac{1}{2}\vec{\xi} + \frac{1}{3}\vec{\eta}) \Psi_{\beta'}^{2\dagger}(0, -\frac{1}{2}\vec{\xi} + \frac{1}{3}\vec{\eta}) \Psi_{\gamma'}^{3\dagger}(0, \frac{2}{3}\vec{\eta}) | 0 \rangle \gamma_{\alpha'\alpha}^0 \gamma_{\beta'\beta}^0 \gamma_{\gamma'\gamma}^0 \\ &= \langle 0 | \Psi_\gamma^1(0, \frac{1}{2}\vec{\xi} + \frac{1}{3}\vec{\eta}) \Psi_{\beta'}^2(0, -\frac{1}{2}\vec{\xi} + \frac{1}{3}\vec{\eta}) \Psi_{\alpha'}^3(0, \frac{2}{3}\vec{\eta}) | M \rangle^* \gamma_{\alpha'\alpha}^0 \gamma_{\beta'\beta}^0 \gamma_{\gamma'\gamma}^0 \\ &= -\langle 0 | \Psi_\alpha^1(0, \frac{1}{2}\vec{\xi} + \frac{1}{3}\vec{\eta}) \Psi_{\beta'}^2(0, -\frac{1}{2}\vec{\xi} + \frac{1}{3}\vec{\eta}) \Psi_{\gamma'}^3(0, \frac{2}{3}\vec{\eta}) | M \rangle^* \gamma_{\alpha'\alpha}^0 \gamma_{\beta'\beta}^0 \gamma_{\gamma'\gamma}^0 \\ &= -\Phi_{\alpha'\beta'\gamma'}^*(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \gamma_{\alpha'\alpha}^0 \gamma_{\beta'\beta}^0 \gamma_{\gamma'\gamma}^0.\end{aligned}$$

Wir finden also den Zusammenhang

$$\bar{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = -\Phi_{\alpha'\beta'\gamma'}^*(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \gamma_{\alpha'\alpha}^0 \gamma_{\beta'\beta}^0 \gamma_{\gamma'\gamma}^0. \quad (\text{B.14})$$

Dieser Zusammenhang bleibt natürlich im Impulsraum erhalten, also

$$\bar{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = -\Phi_{\alpha'\beta'\gamma'}^*(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \gamma_{\alpha'\alpha}^0 \gamma_{\beta'\beta}^0 \gamma_{\gamma'\gamma}^0 \quad (\text{B.15})$$

oder ohne Indizes

$$\bar{\Phi}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = -\Phi^\dagger(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0. \quad (\text{B.16})$$

B.3 Die Salpeter-Normierungsbedingung für eine instantane Wechselwirkung

Ein im Ruhesystem instantaner 3-Fermionen-Wechselwirkungskern

$$K^{(3)}(P, p'_\xi, p'_\eta, p'_\xi, p'_\eta) = V(p_{\xi\perp P}, p_{\eta\perp P}, p_{\xi'\perp P}, p_{\eta'\perp P}) \quad (\text{B.17})$$

mit

$$P^\mu \frac{\partial}{\partial P^\mu} V(p_{\xi\perp P}, p_{\eta\perp P}, p_{\xi'\perp P}, p_{\eta'\perp P}) = 0 \quad (\text{B.18})$$

¹Wegen der gleichen Zeiten verschwindet der Zeitordnungsoperator T.

führt zu keinem Anteil in der Normierungsbedingung (2.25). Im Ruhesystem des gebundenen Zustands gilt deshalb

$$\int \frac{d^4 p_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_\eta}{(2\pi)^4} \bar{\chi}_M(p_\xi, p_\eta) \frac{\partial}{\partial P^0} \left[\left[S_1^F(p_1) \right]^{-1} \otimes \left[S_2^F(p_2) \right]^{-1} \otimes \left[S_3^F(p_3) \right]^{-1} \right]_{P^0=M} \chi_M(p_\xi, p_\eta) = i 2M . \quad (\text{B.19})$$

Benutzen wir nun

$$\frac{\partial}{\partial P^0} \left[S_i^F(p_i) \right]^{-1} = -\frac{i}{3} \gamma^0 \quad (\text{B.20})$$

und die Definition der Vertexfunktion (2.19):

$$\begin{aligned} \chi_M(p_\xi, p_\eta) &= S_1^F\left(\frac{1}{3}M + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_2^F\left(\frac{1}{3}M - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_3^F\left(\frac{1}{3}M - p_\eta\right) \Gamma(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \\ \bar{\chi}_M(p_\xi, p_\eta) &= \bar{\Gamma}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) S_1^F\left(\frac{1}{3}M + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_2^F\left(\frac{1}{3}M - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_3^F\left(\frac{1}{3}M - p_\eta\right) , \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

so folgt

$$\int \frac{d^4 p_\xi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_\eta}{(2\pi)^4} \bar{\Gamma}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \mathcal{I}(p_\xi, p_\eta) \Gamma(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = 2M \quad (\text{B.22})$$

mit der Abkürzung

$$\mathcal{I}(p_\xi, p_\eta) \equiv$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3} \left\{ S_1^F\left(\frac{1}{3}M + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \gamma^0 S_1^F\left(\frac{1}{3}M + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_2^F\left(\frac{1}{3}M - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_3^F\left(\frac{1}{3}M - p_\eta\right) \right. \\ & + S_1^F\left(\frac{1}{3}M + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_2^F\left(\frac{1}{3}M - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \gamma^0 S_2^F\left(\frac{1}{3}M - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_3^F\left(\frac{1}{3}M - p_\eta\right) \\ & \left. + S_1^F\left(\frac{1}{3}M + p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_2^F\left(\frac{1}{3}M - p_\xi + \frac{1}{2}p_\eta\right) \otimes S_3^F\left(\frac{1}{3}M - p_\eta\right) \gamma^0 S_3^F\left(\frac{1}{3}M - p_\eta\right) \right\} . \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Weil die Vertexfunktionen Γ und $\bar{\Gamma}$ im Ruhesystem nur noch Funktionen der räumlichen Relativimpulskomponenten $\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta$ sind, ist die Abhängigkeit des Integranden von den Relativenergien p_ξ^0 und p_η^0 vollständig durch die freien Quarkpropagatoren in \mathcal{I} bestimmt:

$$\int \frac{d^3 p_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\eta}{(2\pi)^3} \bar{\Gamma}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \left[\int \frac{dp_\xi^0}{2\pi} \frac{dp_\eta^0}{2\pi} \mathcal{I}(p_\xi, p_\eta) \right] \Gamma(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = 2M . \quad (\text{B.24})$$

Die p_ξ^0, p_η^0 -Integration kann deshalb ähnlich wie bei der Herleitung der Salpeter-Gleichung mit Hilfe des Residuensatzes analytisch ausgeführt werden, indem wir wieder die Darstellung (B.4) der freien Propagatoren S_i^F benutzen:

$$\int \frac{dp_\xi^0}{2\pi} \frac{dp_\eta^0}{2\pi} \mathcal{I}(p_\xi, p_\eta)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\Lambda_1^+ \otimes \Lambda_2^+ \otimes \Lambda_3^+}{(M - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + i\epsilon)^2} + \frac{\Lambda_1^- \otimes \Lambda_2^- \otimes \Lambda_3^-}{(M + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - i\epsilon)^2} \right) \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \\
&= \left(\frac{\Lambda_1^+ \otimes \Lambda_2^+ \otimes \Lambda_3^+}{M - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + i\epsilon} + \frac{\Lambda_1^- \otimes \Lambda_2^- \otimes \Lambda_3^-}{M + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - i\epsilon} \right)^2 \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 . \quad (\text{B.25})
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Relationen (2.21) und (2.24) lassen sich nun die Vertexfunktionen Γ und $\bar{\Gamma}$ durch die Salpeter-Amplituden Φ und $\bar{\Phi}$ ersetzen und es folgt unmittelbar:

$$- \int \frac{d^3 p_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\eta}{(2\pi)^3} \bar{\Phi}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = 2M . \quad (\text{B.26})$$

Die im Anhang B.2 gezeigte Relation zwischen $\bar{\Phi}$ und Φ ,

$$\bar{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = -\Phi_{\alpha'\beta'\gamma'}^*(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \gamma_{\alpha'\alpha}^0 \gamma_{\beta'\beta}^0 \gamma_{\gamma'\gamma}^0 , \quad (\text{B.27})$$

liefert schließlich die Normierungsbedingung (2.30) für die Salpeter-Amplituden:

$$\int \frac{d^3 p_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\eta}{(2\pi)^3} \Phi_{\alpha\beta\gamma}^*(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \Phi_{\alpha\beta\gamma}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = 2M , \quad (\text{B.28})$$

bzw. wenn wir die Multi-Indizes unterdrücken

$$\int \frac{d^3 p_\xi}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\eta}{(2\pi)^3} \Phi^\dagger(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) \Phi(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta) = 2M . \quad (\text{B.29})$$

Anhang C

Dirac-Gleichung und Dirac-Spinoren in der Weyl-Darstellung

C.1 γ -Matrizen in der Weyl-Darstellung

Seien γ_μ die γ -Matrizen in der Weyl-Darstellung:

$$\gamma_\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^\mu = \eta^{\mu\nu} \gamma_\nu, \quad \eta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

wobei $\sigma_0 = \sigma^0 = \mathbf{1}$ und σ_i , $i = 1, 2, 3$ die gewöhnlichen Pauli-Matrizen sind:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie $\tilde{\sigma}_0 \equiv \sigma_0$ und $\tilde{\sigma}_i \equiv -\sigma_i$ für $i = 1, 2, 3$. Wir haben also

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

In der Weyl-Darstellung ist γ^5 diagonal:

$$\gamma^5 \equiv -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Darstellungsunabhängig gilt für die γ -Matrizen die Antikommutator-Relation

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2 \eta^{\mu\nu} \mathbf{1}. \quad (\text{C.1})$$

C.2 Die Dirac-Spinoren in der Weyl-Darstellung

Die freie Dirac-Gleichung für $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ ist gegeben durch

$$\left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi(x) = 0. \quad (\text{C.2})$$

Im folgenden sei immer $p^0 = \omega(\vec{p}) \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \geq 0$, $p \equiv (\omega(\vec{p}), \vec{p})$ und $\tilde{p} \equiv (-\omega(\vec{p}), \vec{p}) = -\mathcal{P}p$. Dann sind

$$\psi^+(x) \equiv \int \frac{d^3p}{2\omega(\vec{p})} e^{-ipx} \psi^+(p), \quad \psi^-(x) \equiv \int \frac{d^3p}{2\omega(\vec{p})} e^{-i\tilde{p}x} \psi^-(\tilde{p}) \quad (\text{C.3})$$

Lösungen der Gleichung (C.2) wenn $\psi^+(p)$ und $\psi^-(\tilde{p})$ der freien Dirac-Gleichung im Impulsraum

$$\begin{aligned} (\gamma(p) - m) \psi^+(p) &= (p^\mu \gamma_\mu - m) \psi^+(p) = 0 \\ \text{bzw. } (\gamma(\tilde{p}) - m) \psi^-(\tilde{p}) &= (\tilde{p}^\mu \gamma_\mu - m) \psi^-(\tilde{p}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

genügen, wobei

$$\gamma(p) \equiv p^\mu \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}(p) \\ \sigma(p) & 0 \end{pmatrix}$$

mit¹

$$\sigma(p) \equiv p^\mu \sigma_\mu = p^0 \mathbf{I}_{\mathbb{C}^2} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \quad \text{und} \quad \tilde{\sigma}(p) \equiv \sigma(\mathcal{P}p) = p^0 \mathbf{I}_{\mathbb{C}^2} - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}. \quad (\text{C.5})$$

Der Träger der Dirac-Spinoren ψ^\pm ist die positive/negative Massenschale

$$\mathbf{R}_m^\pm \equiv \{p \in \mathbf{R}^4; \langle p, p \rangle = m^2, p = (\pm\omega(\vec{p}), \vec{p})\}. \quad (\text{C.6})$$

Mit Hilfe des Dirac-Hamiltonoperators

$$H(\vec{p}) \equiv \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m) = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m \quad (\text{C.7})$$

schreiben sich diese Gleichungen in äquivalenter Weise als Eigenwertgleichungen

$$H(\vec{p}) \psi^+(p) = \omega(\vec{p}) \psi^+(p), \quad H(\vec{p}) \psi^-(\tilde{p}) = -\omega(\vec{p}) \psi^-(\tilde{p}). \quad (\text{C.8})$$

ψ^+ ist also ein Dirac-Spinor positiver Energie und ψ^- ein Spinor negativer Energie. Mit den Operatoren

$$\Lambda^\pm(\vec{p}) \equiv \frac{\omega(\vec{p}) \pm H(\vec{p})}{2\omega(\vec{p})} \quad (\text{C.9})$$

gilt eine weitere äquivalente Form der Dirac-Gleichung, nämlich

$$\Lambda^+(p) \psi^+(p) = \psi^+(p), \quad \Lambda^-(p) \psi^-(\tilde{p}) = \psi^-(\tilde{p}). \quad (\text{C.10})$$

Für diese Operatoren $\Lambda^\pm(p) : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ gelten die Eigenschaften:

$$[\Lambda^\pm(\vec{p})]^\dagger = \Lambda^\pm(\vec{p}) \quad (\text{C.11})$$

$$\Lambda^\pm(\vec{p}) \Lambda^\pm(\vec{p}) = \Lambda^\pm(\vec{p}) \quad (\text{C.12})$$

$$\Lambda^\pm(\vec{p}) \Lambda^\mp(\vec{p}) = 0 \quad (\text{C.13})$$

$$\Lambda^+(\vec{p}) + \Lambda^-(\vec{p}) = \mathbf{I}_{\mathbb{C}^4} \quad (\text{C.14})$$

$$\Lambda^\pm(\vec{p}) H_i(\vec{p}) = H_i(\vec{p}) \Lambda^\pm(\vec{p}) = \pm \omega(\vec{p}) \Lambda^\pm \quad (\text{C.15})$$

Wegen (C.11), (C.12) und (C.13) sind die $\Lambda^\pm(\vec{p})$ also Orthogonalprojektoren, die den \mathbb{C}^4 in zwei 2-dimensionale orthogonale Teilräume zerlegen.

Nach Gleichung (C.10) projizieren sie auf die Lösungen positiver und negativer Energie der freien Dirac-Gleichung: für eine beliebige Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$ ist nach (C.15) $\Psi^\pm(\vec{p}) \equiv \Lambda^\pm(\vec{p}) \Phi(\vec{p})$

¹ $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Lösung der Dirac-Gleichung (C.7), also ein Spinor positiver bzw. negativer Energie. Explizit ausgeschrieben lauten sie in der Weyl-Darstellung:

$$\Lambda^\pm(\vec{p}) = \frac{1}{\pm 2\omega(\vec{p})} \begin{pmatrix} \pm\omega(\vec{p})\mathbb{1} - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & m \\ m & \pm\omega(\vec{p})\mathbb{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix}.$$

Ein 4-komponentiger-Dirac-Spinor positiver/negativer Energie $\psi^\pm : \mathbf{R}_m^\pm \rightarrow \mathbb{C}^4$ ist eindeutig durch eine 2-komponentige Funktion (Pauli-Spinor) $\varphi^\pm : \mathbf{R}_m^\pm \rightarrow \mathbb{C}^2$ festgelegt, so daß in der Weyl-Darstellung

$$\psi^+(p) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{p})}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma(\mathcal{P}p)} \varphi^+(p) \\ \sqrt{\sigma(p)} \varphi^+(p) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{p})}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma(\mathcal{P}p)} \\ \sqrt{\sigma(p)} \end{pmatrix} \varphi^+(p) \quad (\text{C.16})$$

$$\text{und } \psi^-(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{p})}} \begin{pmatrix} -\sqrt{\sigma(p)} \varphi^-(\vec{p}) \\ \sqrt{\sigma(\mathcal{P}p)} \varphi^-(\vec{p}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{p})}} \begin{pmatrix} -\sqrt{\sigma(p)} \\ \sqrt{\sigma(\mathcal{P}p)} \end{pmatrix} \varphi^-(\vec{p}) \quad (\text{C.17})$$

Lösungen positiver bzw. negativer Energie der Dirac-Gleichung im Impulsraum sind.

Hierzu einige Bemerkungen:

- $\sigma : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbf{H}$ ist der Vektorraum-Isomorphismus (d.h. linear und bijektiv) auf den 4-dimensionalen reellen Vektorraum

$$\mathbf{H} = \{A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, A^\dagger = A\} \quad (\text{C.18})$$

der hermiteschen 2×2 -Matrizen:

$$\sigma(p) \equiv p^\mu \sigma_\mu = p^0 \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & p^0 - p^3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.19})$$

mit $\det \sigma(p) = p^\mu p_\mu \equiv \langle p, p \rangle$.

Die Pauli-Spinmatrizen σ_i , $i=1,2,3$ und bilden zusammen mit $\sigma_0 \equiv \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}$ eine Basis $\{\sigma_\mu\}_{\mu=0,\dots,3} = \{\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ von \mathbf{H} .

- Für $p^0 = \omega(\vec{p}) > 0$, $p^2 = m^2 > 0$ ist $\sigma(p)$ positiv definit, so daß die Wurzel $\sqrt{\sigma(p)}$ existiert, für die man den folgenden expliziten Ausdruck angeben kann:

$$\sqrt{\sigma(p)} = \frac{\sigma(p) + m}{\sqrt{2(\omega(\vec{p}) + m)}} \quad (\text{C.20})$$

- Wir haben hier die Normierung der Spinoren so gewählt, daß gilt:

$$[\psi^+(p)]^\dagger \psi^+(p) = [\varphi^+(p)]^\dagger \varphi^+(p) \text{ und } [\psi^-(\vec{p})]^\dagger \psi^-(\vec{p}) = [\varphi^-(\vec{p})]^\dagger \varphi^-(\vec{p}). \quad (\text{C.21})$$

Mit Hilfe von Abbildungen $\tilde{\mathbf{T}}^\pm : \mathbf{R}_m^\pm \rightarrow M(\mathbb{C}, 4 \times 2) = \{\text{Menge der komplexen } 4 \times 2\text{-Matrizen}\}$

$$\tilde{\mathbf{T}}^+(p) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$$

$$\tilde{\mathbf{T}}^+(p) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{p})}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma(\mathcal{P}p)} \\ \sqrt{\sigma(p)} \end{pmatrix} \quad (\text{C.22})$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{T}^-(\tilde{p}) &: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4 \\ \tilde{T}^-(\tilde{p}) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega(\tilde{p})}} \begin{pmatrix} -\sqrt{\sigma(p)} \\ \sqrt{\sigma(\mathcal{P}p)} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (C.23)$$

können also die Dirac-Spinoren, d.h. die 4-komponentigen Eigenzustände der Energieprojektoren Λ^\pm als 'Einbettung' von Pauli-Spinoren erzeugt werden:

$$\psi^+(p) = \tilde{T}^+(p) \varphi^+(p), \quad \psi^-(\tilde{p}) = \tilde{T}^-(\tilde{p}) \varphi^-(\tilde{p}). \quad (C.24)$$

Man kann leicht zeigen², daß für diese Einbettungsoperatoren die geforderten Eigenschaften

$$\begin{aligned}\Lambda^+(\tilde{p})\tilde{T}^+(p) &= \tilde{T}^+(p), & \Lambda^-(\tilde{p})\tilde{T}^+(p) &= 0 \\ \Lambda^-(\tilde{p})\tilde{T}^-(\tilde{p}) &= \tilde{T}^-(\tilde{p}), & \Lambda^+(\tilde{p})\tilde{T}^-(\tilde{p}) &= 0\end{aligned}\quad (C.25)$$

gelten.

Außerdem gilt:

$$[\tilde{T}^+(p)]^\dagger \tilde{T}^+(p) = \mathbb{1}_{\mathbb{C}}^2, \quad [\tilde{T}^-(\tilde{p})]^\dagger \tilde{T}^-(\tilde{p}) = \mathbb{1}_{\mathbb{C}}^2 \quad (C.26)$$

$$[\tilde{T}^+(p)]^\dagger \tilde{T}^-(\tilde{p}) = 0, \quad [\tilde{T}^-(\tilde{p})]^\dagger \tilde{T}^+(p) = 0 \quad (C.27)$$

Mit (C.26) folgt die Eindeutigkeit der Einbettung, (C.27) zeigt die Orthogonalität der beiden Einbettungen zu Spinoren positiver und negativer Energie.

C.3 Die Darstellung von Poincaré-Transformationen auf den Dirac-Spinoren

C.3.1 Spezielle Poincaré-Transformationen

Sei $a \in \mathbb{R}^4$, Λ eine spezielle Lorentz-Transformation und g das entsprechende Element der Überlagerungsgruppe $SL(2, \mathbb{C})$, welches gegeben ist durch

$$g \sigma(p) g^\dagger = \sigma(\Lambda p) \quad (C.28)$$

bzw.

$$(g^\dagger)^{-1} \tilde{\sigma}(p) g^{-1} = \tilde{\sigma}(\Lambda p). \quad (C.29)$$

Die Koordinaten in zwei beliebigen Bezugssystemen gehen durch eine Poincaré-Transformation (Λ, a) auseinander hervor:

$$x' = (\Lambda, a)x = \Lambda x + a \quad (C.30)$$

Die Darstellung der Poincaré-Transformation (C.30) auf den Dirac-Spinoren $\psi^\pm(x)$ ist gegeben durch

$$(\mathcal{D}_{(\Lambda, a)}\psi^\pm)(x) = S_g \psi^\pm(\Lambda^{-1}(x - a)), \quad (C.31)$$

wobei sich die Transformationsmatrix S_g in der von uns gewählten Weyl-Darstellung schreibt als

$$S_g = \begin{pmatrix} (g^\dagger)^{-1} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}. \quad (C.32)$$

²Man benutze die Identität $\sqrt{\sigma(\mathcal{P}p)} \sqrt{\sigma(p)} = \sqrt{\sigma(p)} \sqrt{\sigma(\mathcal{P}p)} = \sqrt{p^2} = m$.

Im Impulsraum ist diese Darstellung $\mathcal{D}_{(\Lambda,a)}$ gegeben durch:

$$\left(\mathcal{D}_{(\Lambda,a)}\psi^+\right)(p) = e^{ipa} S_g \psi^+(\Lambda^{-1}p), \quad \left(\mathcal{D}_{(\Lambda,a)}\psi^-\right)(\tilde{p}) = e^{i\tilde{p}a} S_g \psi^-(\Lambda^{-1}\tilde{p}) \quad (\text{C.33})$$

Für die Einbettungs-Operatoren (C.22) und (C.23) und die Transformationsmatrix S_g findet man folgende die Intertwining-Relationen:

$$S_g \tilde{T}^+(\Lambda^{-1}p) = \tilde{T}^+(p) \frac{\sqrt{\omega_p}}{\sqrt{2\omega_{\Lambda^{-1}p}(\omega_{\Lambda^{-1}p} + m)}} \left\{ \sqrt{\sigma(\mathcal{P}p)} g + \sqrt{\sigma(p)} (g^\dagger)^{-1} \right\} \quad (\text{C.34})$$

$$S_g \tilde{T}^-(\Lambda^{-1}\tilde{p}) = \tilde{T}^-(\tilde{p}) \frac{\sqrt{\omega_{\tilde{p}}}}{\sqrt{2\omega_{\Lambda^{-1}\tilde{p}}(\omega_{\Lambda^{-1}\tilde{p}} + m)}} \left\{ \sqrt{\sigma(p)} g + \sqrt{\sigma(\mathcal{P}p)} (g^\dagger)^{-1} \right\}. \quad (\text{C.35})$$

Aus diesen Intertwining-Relationen erhält man für die 2er-Spinoren $\varphi^+(p)$ und $\varphi^-(\tilde{p})$ mit

$$\psi^+(p) = \tilde{T}^+(p) \varphi^+(p), \quad \psi^-(\tilde{p}) = \tilde{T}^-(\tilde{p}) \varphi^-(\tilde{p})$$

die Darstellungen

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}_{(\Lambda,a)}\varphi^+\right)(p) &= e^{ipa} \frac{\sqrt{\omega_p}}{\sqrt{2\omega_{\Lambda^{-1}p}(\omega_{\Lambda^{-1}p} + m)}} \left\{ \sqrt{\sigma(\mathcal{P}p)} g + \sqrt{\sigma(p)} (g^\dagger)^{-1} \right\} \varphi^+(\Lambda^{-1}p), \\ \left(\mathcal{D}_{(\Lambda,a)}\varphi^-\right)(\tilde{p}) &= e^{i\tilde{p}a} \frac{\sqrt{\omega_{\tilde{p}}}}{\sqrt{2\omega_{\Lambda^{-1}\tilde{p}}(\omega_{\Lambda^{-1}\tilde{p}} + m)}} \left\{ \sqrt{\sigma(p)} g + \sqrt{\sigma(\mathcal{P}p)} (g^\dagger)^{-1} \right\} \varphi^-(\Lambda^{-1}\tilde{p}). \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

Im Falle einer 3-dimensionalen Drehung um eine Drehachse $\vec{\omega}$, d.h. $\Lambda = R \in SO(3)$ und $a = 0$ gilt für das Element der Überlagerungsgruppe:

$$g = u \in SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C}) \quad (\text{C.37})$$

$$u = e^{-i \vec{\sigma} \vec{\omega}} \quad (\text{C.38})$$

$$S_u = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \quad (\text{C.39})$$

und die Intertwining-Relationen (C.34) und (C.35) vereinfachen sich zu

$$S_u \tilde{T}^+(R^{-1}p) = \tilde{T}^+(p) u, \quad S_u \tilde{T}^-(R^{-1}\tilde{p}) = \tilde{T}^-(\tilde{p}) u. \quad (\text{C.40})$$

Für die Darstellung der Drehung auf den 2er-Spinoren folgt damit

$$\left(\mathcal{D}_{(R,0)}\varphi^+\right)(p) = u \varphi^+(R^{-1}p), \quad \left(\mathcal{D}_{(R,0)}\varphi^-\right)(\tilde{p}) = u \varphi^-(R^{-1}\tilde{p}). \quad (\text{C.41})$$

C.3.2 Die Paritätstransformation

Die Darstellung der Paritätstransformation $\mathcal{P}x = \mathcal{P}(x^0, \vec{x}) = (x^0, -\vec{x})$ auf den Dirac-Spinoren $\psi^\pm(x)$ ist gegeben durch

$$(\mathcal{P}\psi^\pm)(x) = \gamma^0 \psi^\pm(\mathcal{P}x) \quad (\text{C.42})$$

und entsprechend im Impulsraum

$$(\mathcal{P}\psi^+)(p) = \gamma^0 \psi^+(\mathcal{P}p), \quad (\mathcal{P}\psi^-)(\tilde{p}) = \gamma^0 \psi^-(\mathcal{P}\tilde{p}). \quad (\text{C.43})$$

Zwischen γ^0 und den Einbettungsoperatoren sind die folgenden Intertwining-Relation unmittelbar einsichtig:

$$\gamma^0 \tilde{T}^+(\mathcal{P} p) = \tilde{T}^+(p) \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2}, \quad \gamma^0 \tilde{T}^-(\mathcal{P} \tilde{p}) = \tilde{T}^-(\tilde{p}) (-\mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2}) \quad (\text{C.44})$$

Daraus erhält man die Darstellungen der Paritätstransformation auf den 2er-Spinoren φ^+ und φ^- :

$$(\mathcal{P}\varphi^+)(p) = \varphi^+(\mathcal{P}p), \quad (\mathcal{P}\varphi^-)(\tilde{p}) = -\varphi^-(\mathcal{P}\tilde{p}). \quad (\text{C.45})$$

Mit unserer speziellen Wahl (C.16) und (C.17) für die 4er-Spinoren $\psi^+(p)$, $\psi^-(\tilde{p})$ ist die Darstellung der Paritätstransformation auf den 2er Spinoren φ^+ , φ^- besonders einfach und ist durch die Transformation des Arguments $p \rightarrow \mathcal{P}p$ ohne eine zusätzliche Transformation auf dem \mathbb{Q}^2 gegeben.

Man beachte den relativen Phasenfaktor -1 zwischen den beiden Darstellungen für 2er-Spinoren positiver und negativer Energie !

C.3.3 Die Zeitumkehrtransformation

Die Zeitumkehrtransformation $\mathcal{T}x = \mathcal{T}(x^0, \vec{x}) = (-x^0, \vec{x})$ stellt sich auf den Dirac-Spinoren $\psi^\pm(x)$ dar durch

$$(\mathcal{T}\psi^\pm)(x) = -\gamma^1\gamma^3\psi^{\pm*}(\mathcal{T}x) \quad (\text{C.46})$$

mit

$$-\gamma^1\gamma^3 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \quad \epsilon \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.47})$$

Die entsprechende Darstellung im Impulsraum ist gegeben durch

$$(\mathcal{T}\psi^+)(p) = -\gamma^1\gamma^3\psi^{+*}(\mathcal{P}p), \quad (\mathcal{T}\psi^-)(\tilde{p}) = -\gamma^1\gamma^3\psi^{-*}(\mathcal{P}\tilde{p}). \quad (\text{C.48})$$

Mit Hilfe der gültigen Relation $\epsilon\sigma^*(p) = \sigma(\mathcal{P}p)\epsilon$ findet man die Intertwining-Relationen zwischen den Einbettungsoperatoren \tilde{T}^\pm und $-\gamma^1\gamma^3$:

$$-\gamma^1\gamma^3 \tilde{T}^{+*}(\mathcal{P} p) = \tilde{T}^+(p) \epsilon, \quad -\gamma^1\gamma^3 \tilde{T}^{-*}(\mathcal{P} \tilde{p}) = \tilde{T}^-(\tilde{p}) \epsilon. \quad (\text{C.49})$$

Damit erhalten wir die Darstellungen der Zeitumkehrtransformation auf den 2er-Spinoren φ^+ und φ^- :

$$(\mathcal{T}\varphi^+)(p) = \epsilon \varphi^{+*}(\mathcal{P}p), \quad (\mathcal{T}\varphi^-)(\tilde{p}) = \epsilon \varphi^{-*}(\mathcal{P}\tilde{p}). \quad (\text{C.50})$$

Anhang D

Die Oszillatorbasis

D.1 Der harmonische Oszillator

Die Schrödinger-Gleichung des quantenmechanischen 3-dimensionalen harmonischen Oszillators mit Masse m und Oszillatorstärke k ist gegeben durch

$$H_{\text{OSZ}} \phi(\vec{x}) = E \phi(\vec{x}), \quad (\text{D.1})$$

mit dem Hamilton-Operator

$$H_{\text{OSZ}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} k |\vec{x}|^2, \quad \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}. \quad (\text{D.2})$$

Die Oszillatorfrequenz ω und der Oszillatorparameter β sind definiert als:

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \quad (\text{D.3})$$

Nach Reskalierung der Koordinaten mit dem Oszillatorparameter β d.h.

$$\tilde{p} \equiv \beta p, \quad \tilde{x} \equiv \frac{\vec{x}}{\beta} \quad (\text{D.4})$$

schreibt sich der Hamiltonoperator in dimensionslosen Koordinaten \tilde{x}

$$H_{\text{OSZ}} = \hbar\omega \frac{1}{2} \left(-\tilde{\Delta} + |\tilde{x}|^2 \right) \quad (\text{D.5})$$

und wir erhalten die Differentialgleichung:

$$H_{\text{OSZ}} \phi_{nlm}(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \left(-\tilde{\Delta} + |\tilde{x}|^2 \right) \phi_{nlm}(\tilde{x}) = E_{nlm} \phi_{nlm}(\tilde{x}). \quad (\text{D.6})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung liefert die Eigenwerte

$$E_{nlm} = \hbar\omega \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) \quad (\text{D.7})$$

und unter Ausnutzung von

$$\left[h_{\text{OSZ}}, \hat{L}^2 \right]_- = \left[h_{\text{OSZ}}, \hat{L}_z \right]_- = 0 \quad (\text{D.8})$$

die Eigenfunktionen

$$\phi_{nlm}^\beta(\vec{x}) = R_{nl}^\beta(r) Y_{lm}(\Omega) \quad (\text{D.9})$$

in Polarkoordinaten $\vec{x} = (r, \theta, \varphi) = (r, \Omega)$.

Hierbei sind

$$\begin{aligned} n: & \text{ radiale Quantenzahl} & n &= 0, 1, 2, \dots \\ l: & \text{ Drehimpulsquantenzahl} & l &= 0, 1, 2, \dots \\ m: & \text{ 3-Komponente des Drehimpulses} & m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l \end{aligned}$$

Die Funktionen $Y_{lm}(\Omega) = Y_{lm}(\theta, \varphi)$ sind die Kugelflächenfunktionen, welche Eigenzustände der Drehimpulsoperatoren \hat{L}^2, \hat{L}_z sind:

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 Y_{lm}(\Omega) &= l(l+1) Y_{lm}(\Omega) \\ \hat{L}_z Y_{lm}(\Omega) &= m Y_{lm}(\Omega). \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Sie können durch die assoziierten Legendre-Polynome $P_l^m(\cos \theta)$ ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\Omega) &= Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \text{ für } m \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Für negative Werte von m gilt:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l(-m)}^*(\theta, \varphi), \quad m < 0. \quad (\text{D.12})$$

Die Drehimpulsquantenzahl l bestimmt die Parität der Oszillatorfunktion $\phi_{nlm}^\beta(\vec{x})$:

$$Y_{lm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (\text{D.13})$$

Die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} sind orthonormal

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{D.14})$$

und bilden ein vollständiges Funktionensystem

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (\text{D.15})$$

Die Radialfunktionen $R_{nl}^\beta(r)$ lassen schreiben als [21]

$$R_{nl}^\beta(r) \equiv N_{nl}^\beta \sum_{\mu=0}^n c_\mu^{nl} \left(\frac{r}{\beta}\right)^{2\mu+l} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\beta}\right)^2} \quad (\text{D.16})$$

mit den Normierungskoeffizienten

$$N_{nl}^\beta \equiv \sqrt{\frac{2^{l-n+2} (2l+2n+1)!!}{\sqrt{\pi} n! ((2l+1)!!)^2}} \beta^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2\Gamma(n+l+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+1) \left(\Gamma(l+\frac{3}{2})\right)^2}} \beta^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{D.17})$$

und den Summationskoeffizienten

$$c_\mu^{nl} \equiv (-1)^\mu 2^\mu \binom{n}{\mu} \frac{(2l+1)!!}{(2l+2\mu+1)!!} = (-1)^\mu 2^\mu \binom{n}{\mu} \frac{\Gamma(l+\frac{3}{2})}{\Gamma(\mu+l+\frac{3}{2})}. \quad (\text{D.18})$$

Hierbei sind die Funktionen $\Gamma(z)$ die gewöhnlichen Gammafunktionen mit

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{R}, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{D.19})$$

$$\text{und } \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \quad (\text{D.20})$$

Für die Radialfunktionen $R_{nl}^\beta(r)$ gilt weiter

$$\int_0^\infty dr r^2 \left(R_{nl}^\beta(r)\right)^* R_{n'l}^\beta(r) = \delta_{nn'}, \quad (\text{D.21})$$

so daß die Oszillatoreigenfunktionen insbesondere auf Eins normiert sind:

$$\int d^3x |\phi_{nlm}^\beta(\vec{x})|^2 = 1. \quad (\text{D.22})$$

Der Zusammenhang von $\phi_{nlm}^\beta(\vec{x})$ mit der normierten Oszillatorwellenfunktion $\phi_{nlm}(\tilde{\vec{x}})$ in der reskalierten dimensionslosen Koordinate $\tilde{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{\beta}$ ist offensichtlich gegeben durch

$$\phi_{nlm}^\beta(\vec{x}) = \beta^{-\frac{3}{2}} \phi_{nlm}(\tilde{\vec{x}}) = \beta^{-\frac{3}{2}} \phi_{nlm}^{\beta=1}\left(\frac{\vec{x}}{\beta}\right). \quad (\text{D.23})$$

Eine nützliche Eigenschaft der Oszillatorwellenfunktionen ist die Tatsache, daß die Fouriertransformierte einer Oszillatorwellenfunktion wiederum eine Oszillatorwellenfunktion ist. Entsprechend unserer üblichen Notation sei die Fouriertransformierte $\tilde{\phi}_{nlm}^\beta(\vec{p})$ von $\phi_{nlm}^\beta(\vec{x})$ definiert durch

$$\phi_{nlm}^\beta(\vec{x}) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}} \tilde{\phi}_{nlm}^\beta(\vec{p}) \quad (\text{D.24})$$

oder umgekehrt

$$\tilde{\phi}_{nlm}^\beta(\vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\vec{x}} \phi_{nlm}^\beta(\vec{x}). \quad (\text{D.25})$$

Dann findet man nämlich für die Fouriertransformierte [21]:

$$\tilde{\phi}_{nlm}^\beta(\vec{p}) = (-i)^{2n+l} (2\pi)^{\frac{3}{2}} \phi_{nlm}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}). \quad (\text{D.26})$$

D.2 Der harmonische Oszillator für drei Teilchen gleicher Masse und Oszillatorstärke

Die in den nächsten Abschnitten geführte Diskussion über den harmonischen 3-Teilchen-Oszillator bezieht sich auf den für uns in dieser Arbeit ausreichenden¹ Spezialfall gleicher Massen. Wir halten uns in diesem Abschnitt an die Ausführungen in [21]. Dort wird ganz allgemein der Fall ungleicher Massen diskutiert.

Sei der Hamiltonoperator für drei Teilchen gegeben durch ($\vec{p}_i = -i\hbar\vec{\nabla}$)

$$H_{\text{osz}}^{(3)} = \sum_{i=1}^3 \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i<j} k_i |\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2. \quad (\text{D.27})$$

¹Wir hatten zur Abseparation der Schwerpunktsbewegung in der Bethe-Salpeter-Gleichung die Jacobi-Koordinaten (willkürlich) wie die angepaßten Schwerpunktskoordinaten in einem nichtrelativistischen Zentralfeldproblem für drei Teilchen gleicher Masse gewählt !

Wir interessieren uns für den Spezialfall gleicher Massen $m = m_1 = m_2 = m_3$ und gleicher Oszillatorstärken $k = k_1 = k_2 = k_3$, also

$$H_{\text{osZ}}^{(3)} = \frac{1}{2m} (|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_2|^2 + |\vec{p}_3|^2) + \frac{1}{2} k (|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 + |\vec{x}_2 - \vec{x}_3|^2 + |\vec{x}_1 - \vec{x}_3|^2). \quad (\text{D.28})$$

Wir führen nun die folgenden Jacobi-Koordinaten ein (vergleiche Gleichungen (2.82) und (2.83)): Im Ortsraum:

$$\begin{aligned} \vec{X} &\equiv \frac{1}{3}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3) & \vec{x}_1 &= \vec{X} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda} \\ \vec{\rho} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) & \vec{x}_2 &= \vec{X} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda} \\ \vec{\lambda} &\equiv \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3) & \vec{x}_3 &= \vec{X} - \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{\lambda} \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

und im Impulsraum (die kanonisch konjugierten Impulse):

$$\begin{aligned} \vec{P} &\equiv (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) & \vec{p}_1 &= \frac{1}{3}\vec{P} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_\rho + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{p}_\lambda \\ \vec{p}_\rho &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) & \vec{p}_2 &= \frac{1}{3}\vec{P} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_\rho + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{p}_\lambda \\ \vec{p}_\lambda &\equiv \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2\vec{p}_3) & \vec{p}_3 &= \frac{1}{3}\vec{P} - \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_\lambda \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Separiert man in der Schrödinger-Gleichung

$$H_{\text{osZ}}^{(3)} \Psi_{NLM}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \tilde{E} \Psi_{NLM}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \quad (\text{D.31})$$

in der gewohnten Weise die Schwerpunktsbewegung ab, d.h.

$$\Psi_{NLM}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = e^{\frac{i\vec{P}\vec{X}}{\hbar}} \Phi_{NLM}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}), \quad (\text{D.32})$$

so erhält man die Schrödinger-Gleichung im Schwerpunktsystem ($\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$) für die von den Relativkoordinaten $\vec{\rho}, \vec{\lambda}$ abhängigen Wellenfunktionen $\Phi_{NLM}(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$:

$$H_{\text{osZ}}^{\vec{P}=0} \Phi_{NLM}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = E_N \Phi_{NLM}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \quad (\text{D.33})$$

mit dem Hamilton-Operator

$$H_{\text{osZ}}^{\vec{P}=0} = \frac{1}{2m} \vec{p}_\rho^2 + \frac{1}{2} \tilde{k} |\vec{\rho}|^2 + \frac{1}{2m} \vec{p}_\lambda^2 + \frac{1}{2} \tilde{k} |\vec{\lambda}|^2, \quad (\text{D.34})$$

wobei $\tilde{k} \equiv 3k$, sowie $\vec{p}_\rho = -i\hbar \vec{\nabla}_\rho$ und $\vec{p}_\lambda = -i\hbar \vec{\nabla}_\lambda$.

Dieser Hamiltonoperator setzt sich also additiv aus zwei Hamiltonoperatoren $h_{1\text{ osZ}}$ und $h_{2\text{ osZ}}$ des quantenmechanischen 3-dimensionalen Oszillators zusammen:

$$H_{\text{osZ}}^{\vec{P}=0} = h_{1\text{ osZ}} + h_{2\text{ osZ}} = H_{12\text{ osZ}} \quad (\text{D.35})$$

und beschreibt daher zwei ungekoppelte harmonische Oszillatoren, für die nach dem letzten Abschnitt im einzelnen gilt:

$$h_{1\text{ osZ}} \phi_{n_\rho l_\rho m_\rho}^\beta(\vec{\rho}) = \left(\frac{1}{2m} \vec{p}_\rho^2 + \frac{1}{2} \tilde{k} |\vec{\rho}|^2 \right) \phi_{n_\rho l_\rho m_\rho}^\beta(\vec{\rho}) = E_{1\text{ } n_\rho l_\rho m_\rho} \phi_{n_\rho l_\rho m_\rho}^\beta(\vec{\rho}) \quad (\text{D.36})$$

mit $E_{1\ n_\rho l_\rho m_\rho} = \hbar\omega(2n_\rho + l_\rho + \frac{3}{2})$ und

$$h_{2\ \text{osZ}} \phi_{n_\lambda l_\lambda m_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}) = \left(\frac{1}{2m} \vec{p}_\lambda^2 + \frac{1}{2} \tilde{k} |\vec{\lambda}|^2 \right) \phi_{n_\lambda l_\lambda m_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}) = E_{2\ n_\lambda l_\lambda m_\lambda} \phi_{n_\lambda l_\lambda m_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}) \quad (\text{D.37})$$

mit $E_{2\ n_\lambda l_\lambda m_\lambda} = \hbar\omega(2n_\lambda + l_\lambda + \frac{3}{2})$.

Hierbei sind die Oszillatorenergie ω und der Oszillatorparameter β wieder definiert durch

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{\tilde{k}}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \beta \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \quad (\text{D.38})$$

Wir bekommen also:

$$H_{12\ \text{osZ}} \Phi_{NLM\alpha}^\beta(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = E_N \Phi_{NLM\alpha}^\beta(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \quad (\text{D.39})$$

mit den Eigenwerten

$$E_N = E_1 + E_2 = (N + 3) \hbar\omega, \quad N = 2n_\rho + l_\rho + 2n_\lambda + l_\lambda. \quad (\text{D.40})$$

Die Eigenfunktionen $\Phi_{NLM\alpha}^\beta(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$ von $H_{12\ \text{osZ}}$ sind das Produkt der 1-Teilchen-Wellenfunktionen $\phi_{n_\rho l_\rho m_\rho}^\beta(\vec{\rho})$ und $\phi_{n_\lambda l_\lambda m_\lambda}^\beta(\vec{\lambda})$, deren Drehimpulse \vec{l}_ρ und \vec{l}_λ wir zum Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \vec{l}_\rho + \vec{l}_\lambda, \quad d.h. |l_\rho - l_\lambda| \leq L \leq l_\rho + l_\lambda, \quad (\text{D.41})$$

koppeln können, also

$$\begin{aligned} \Phi_{NLM\alpha}^\beta(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) &= \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^\beta(\vec{\rho}) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}) \right]_M^L \\ &= \sum_{m_\rho, m_\lambda} \langle l_\rho m_\rho, l_\lambda m_\lambda | L M \rangle \phi_{n_\rho l_\rho m_\rho}^\beta(\vec{\rho}) \phi_{n_\lambda l_\lambda m_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}) \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

Die Eigenzustände von $H_{12\ \text{osZ}}$ sind somit durch die Quantenzahlen N, L, M, α charakterisiert, wobei wir die Einteilchen-Quantenzahlen $n_\rho, l_\rho, n_\lambda, l_\lambda$ zu α zusammenfassen.

Die Oszillatorwellenfunktionen $\Phi_{NLM\alpha}^\beta(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$ haben eine definierte Parität. Diese ist durch

$$\pi = (-1)^{l_\rho + l_\lambda} = (-1)^N \quad (\text{D.43})$$

gegeben, denn:

$$\begin{aligned} \Phi_{NLM\alpha}^\beta(-\vec{\rho}, -\vec{\lambda}) &= \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^\beta(-\vec{\rho}) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^\beta(-\vec{\lambda}) \right]_M^L = (-1)^{l_\rho + l_\lambda} \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^\beta(\vec{\rho}) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}) \right]_M^L \\ &= (-1)^N \Phi_{NLM\alpha}^\beta(\vec{\rho}, \vec{\lambda}). \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

In reskalierten dimensionslosen Koordinaten

$$\tilde{\vec{\rho}} \equiv \frac{\vec{\rho}}{\beta}, \quad \tilde{\vec{\lambda}} \equiv \frac{\vec{\lambda}}{\beta}, \quad \tilde{p}_\rho \equiv \beta p_\rho, \quad \tilde{p}_\lambda \equiv \beta p_\lambda \quad (\text{D.45})$$

schreibt sich der Hamilton-Operator in der Form

$$H_{12\ \text{osZ}} = \hbar\omega \frac{1}{2} \left(-\tilde{\Delta}_\rho + |\tilde{\vec{\rho}}|^2 - \tilde{\Delta}_\lambda + |\tilde{\vec{\lambda}}|^2 \right) \quad (\text{D.46})$$

und die Eigenfunktionen $\Phi(\tilde{\vec{\rho}}, \tilde{\vec{\lambda}})$ in den reskalierten Koordinaten stehen mit den Eigenfunktionen $\Phi^\beta(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$ in folgendem Zusammenhang:

$$\Phi^\beta(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = \beta^{-3} \Phi(\tilde{\vec{\rho}}, \tilde{\vec{\lambda}}) = \beta^{-3} \Phi^{\beta=1} \left(\frac{\vec{\rho}}{\beta}, \frac{\vec{\lambda}}{\beta} \right) \quad (\text{D.47})$$

Die Fouriertransformierte von $\Phi^\beta(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$ ist nach (D.26) wieder eine 3-Teilchen-Oszillatorfunktion:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}^\beta(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &\equiv \int d^3\rho d^3\lambda e^{-i\vec{p}_\rho \cdot \vec{\rho}} e^{-i\vec{p}_\lambda \cdot \vec{\lambda}} \Phi^\beta(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = (-i)^{2n_\rho + l_\rho + 2n_\lambda + l_\lambda} (2\pi)^3 \Phi^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \\ &= (-i)^N (2\pi)^3 \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\lambda) \right]_M^L.\end{aligned}\quad (\text{D.48})$$

D.3 Talmi-Moshinsky-Transformationen

Wir betrachten orthogonale Transformationen der Jacobi-Koordinaten $\vec{\rho}$ und $\vec{\lambda}$ der folgenden Art:

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho}' \\ \vec{\lambda}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{1+d}} & -\sqrt{\frac{d}{1+d}} \\ \sqrt{\frac{d}{1+d}} & \sqrt{\frac{1}{1+d}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix} \quad \text{mit } d \in \mathbb{R}, d \geq 0 \text{ beliebig.} \quad (\text{D.49})$$

Dieses sind sogenannte orthogonale **Talmi-Transformationen** der zwei harmonischen Oszillatoren $h_1 \text{ osz}$ und $h_2 \text{ osz}$. Die Oszillator-Eigenfunktionen haben ein sehr angenehmes Verhalten unter diesen Transformationen, denn die Darstellung von $\vec{\rho}, \vec{\lambda} \rightarrow \vec{\rho}', \vec{\lambda}'$ auf ihrer Basis ist endlich!

Die Transformation der Wellenfunktionen, welche als **Talmi-Moshinsky-Transformation** bezeichnet wird, stellt sich nämlich wie folgt dar [31]:

$$\left[\phi_{n_\rho l_\rho}^\beta(\vec{\rho}) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}) \right]_M^L = \sum_{n'_\rho l'_\rho, n'_\lambda l'_\lambda} \langle n'_\rho l'_\rho, n'_\lambda l'_\lambda; L | n_\rho l_\rho, n_\lambda l_\lambda; L \rangle_d \left[\phi_{n'_\rho l'_\rho}^\beta(\vec{\rho}') \otimes \phi_{n'_\lambda l'_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}') \right]_M^L \quad (\text{D.50})$$

Die Koeffizienten $\langle n'_\rho l'_\rho, n'_\lambda l'_\lambda; L | n_\rho l_\rho, n_\lambda l_\lambda; L \rangle_d$ bezeichnet man als **Talmi-Moshinsky-Klammern**, im Spezialfall $d = 1$ werden sie in der Literatur auch Brody-Moshinsky-Klammern genannt. Unter der Transformation (D.49) bleiben die Energie $(N + 3) \hbar\omega$, der Drehimpuls L und die Parität π erhalten. Deshalb besitzt die transformierte Oszillatorfunktion ebenfalls die Quantenzahlen N , L und M und es gelten die Auswahlregeln:

$$\begin{aligned}\text{Energieerhaltung : } n_\rho + l_\rho + 2n_\lambda + l_\lambda &= 2n'_\rho + l'_\rho + 2n'_\lambda + l'_\lambda \\ \text{Paritätserhaltung : } (-1)^{l_\rho + l_\lambda} &= (-1)^{l'_\rho + l'_\lambda} \\ \text{Drehimpulserhaltung : } |l_\rho - l_\lambda| &\leq L \leq l_\rho + l_\lambda \\ &|l'_\rho - l'_\lambda| \leq L \leq l'_\rho + l'_\lambda\end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

Die Klammern sind darüberhinaus reell und unabhängig von M .

Die Transformation findet deshalb auf dem endlich-dimensionalen, invarianten Unterraum

$$\mathcal{U}(N, L) = \text{Span} \{ |\alpha; NL\rangle = |n_\rho l_\rho, n_\lambda l_\lambda; NL\rangle \}_{\substack{N=2n_\rho+l_\rho+2n_\lambda+l_\lambda \\ |l_\rho-l_\lambda| \leq L \leq l_\rho+l_\lambda}} \quad (\text{D.52})$$

statt, der durch die Quantenzahlen N und L festgelegt ist. Die endliche Dimension eines solchen irreduziblen Unterraumes zu N, L ist gegeben durch

$$\dim \mathcal{U}(N, L) = \begin{cases} \frac{1}{8}(L+1)(N-L+2)(N-L+4) & \text{falls } N-L \text{ gerade} \\ \frac{1}{8}L(N-L+1)(N-L+3) & \text{falls } N-L \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (\text{D.53})$$

D.4 Sätze von Jacobi-Koordinaten und ihre Darstellung durch Talmi-Moshinsky-Transformationen

In dem bisher gewählten Satz von Jacobi-Koordinaten (D.29) und (D.30) ist das 3. Teilchen ausgezeichnet, da die Koordinaten \vec{x}_3 bzw. \vec{p}_3 nur von einer Relativkoordinate nämlich $\vec{\lambda}$ bzw. \vec{p}_λ abhängen. 1-Teilchen-Matrixelemente für das 3. Teilchen lassen sich in diesem Satz von Relativkoordinaten besonders einfach berechnen. Durch zyklische Permutation der Quarkindizes können wir aus diesem Satz (=Satz 3) von Jacobi-Koordinaten $(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \equiv (\vec{\rho}_3, \vec{\lambda}_3)$ bzw. $(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \equiv (\vec{p}_{\rho_3}, \vec{p}_{\lambda_3})$ zwei weitere Sätze von Relativkoordinaten bilden, in denen entsprechend das Teilchen 1 bzw. das Teilchen 2 ausgezeichnet ist.

Wir definieren:

- Jacobi-Koordinaten, Satz 1:

$$\begin{aligned}
 \vec{\rho}_1 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{x}_2 - \vec{x}_3) \\
 \vec{\lambda}_1 &\equiv \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{x}_2 + \vec{x}_3 - 2\vec{x}_1)
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 \vec{x}_1 &= \vec{X} - \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{\lambda}_1 \\
 \vec{x}_2 &= \vec{X} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda}_1 \\
 \vec{x}_3 &= \vec{X} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda}_1
 \end{aligned}
 \tag{D.54}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{\rho_1} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{p}_2 - \vec{p}_3) \\
 \vec{p}_{\lambda_1} &\equiv \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{p}_2 + \vec{p}_3 - 2\vec{p}_1)
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 \vec{p}_1 &= \frac{1}{3}\vec{P} - \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_{\lambda_1} \\
 \vec{p}_2 &= \frac{1}{3}\vec{P} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_{\rho_1} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{p}_{\lambda_1} \\
 \vec{p}_3 &= \frac{1}{3}\vec{P} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_{\rho_1} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{p}_{\lambda_1}
 \end{aligned}
 \tag{D.55}$$

- Jacobi-Koordinaten, Satz 2:

$$\begin{aligned}
 \vec{\rho}_2 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{x}_3 - \vec{x}_1) \\
 \vec{\lambda}_2 &\equiv \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{x}_3 + \vec{x}_1 - 2\vec{x}_2)
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 \vec{x}_1 &= \vec{X} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda}_2 \\
 \vec{x}_2 &= \vec{X} - \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{\lambda}_2 \\
 \vec{x}_3 &= \vec{X} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda}_2
 \end{aligned}
 \tag{D.56}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{\rho_2} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \\
 \vec{p}_{\lambda_2} &\equiv \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{p}_3 + \vec{p}_1 - 2\vec{p}_2)
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 \vec{p}_1 &= \frac{1}{3}\vec{P} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_{\rho_2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{p}_{\lambda_2} \\
 \vec{p}_2 &= \frac{1}{3}\vec{P} - \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{p}_{\lambda_2} \\
 \vec{p}_3 &= \frac{1}{3}\vec{P} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_{\rho_2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{p}_{\lambda_2}
 \end{aligned}
 \tag{D.57}$$

Dann gehen die Koordinatesätze 1 und 2 durch folgende orthogonale Transformationen aus dem Satz 3 hervor:

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho}_1 \\ \vec{\lambda}_1 \end{pmatrix} = (123) \begin{pmatrix} \vec{\rho}_3 \\ \vec{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}_3 \\ \vec{\lambda}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{D.58})$$

und

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho}_2 \\ \vec{\lambda}_2 \end{pmatrix} = (123)^2 \begin{pmatrix} \vec{\rho}_3 \\ \vec{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}_3 \\ \vec{\lambda}_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.59})$$

Dieselben Transformationseigenschaften gelten natürlich auch für die relativen Impulskoordinaten, die sich ja in derselben Weise aus den kartesischen Koordinaten berechnen wie die Ortskoordinaten.

Wir können diese Transformationen in der Form (D.49) schreiben:

$$\begin{pmatrix} -\vec{\rho}_1 \\ -\vec{\lambda}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}_3 \\ \vec{\lambda}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{D.60})$$

und

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho}_2 \\ -\vec{\lambda}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\vec{\rho}_3 \\ \vec{\lambda}_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.61})$$

Die Transformation der der Jacobi-Koordinaten von Satz 3 nach Satz 1 bzw. Satz 2 durch zyklische Permutation der Quarkindizes ist somit durch eine Talmi-Transformation der Form (D.49) mit $d = 3$ gegeben und kann nach dem vorangegangenen Abschnitt durch eine Talmi-Moshinsky-Transformation (D.50) auf den Oszillator-Eigenfunktionen dargestellt werden.

Demnach transformieren sich die Wellenfunktionen also wie folgt:

- Satz 3 \rightarrow Satz 1:

$$\begin{aligned} & \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^\beta(\vec{\rho}) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}) \right]_M^L \\ &= (-1)^{l_\rho + l_\lambda} \sum_{n_{\rho_1} l_{\rho_1} n_{\lambda_1} l_{\lambda_1}} \langle n_{\rho_1} l_{\rho_1}, n_{\lambda_1} l_{\lambda_1}; L | n_\rho l_\rho, n_\lambda l_\lambda; L \rangle_3 \left[\phi_{n_{\rho_1} l_{\rho_1}}^\beta(\vec{\rho}_1) \otimes \phi_{n_{\lambda_1} l_{\lambda_1}}^\beta(\vec{\lambda}_1) \right]_M^L \end{aligned} \quad (\text{D.62})$$

- Satz 3 \rightarrow Satz 2:

$$\begin{aligned} & \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^\beta(\vec{\rho}) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}) \right]_M^L \\ &= (-1)^{l_\rho} \sum_{n_{\rho_2} l_{\rho_2} n_{\lambda_2} l_{\lambda_2}} (-1)^{l_{\lambda_2}} \langle n_{\rho_2} l_{\rho_2}, n_{\lambda_2} l_{\lambda_2}; L | n_\rho l_\rho, n_\lambda l_\lambda; L \rangle_3 \left[\phi_{n_{\rho_2} l_{\rho_2}}^\beta(\vec{\rho}_2) \otimes \phi_{n_{\lambda_2} l_{\lambda_2}}^\beta(\vec{\lambda}_2) \right]_M^L \end{aligned} \quad (\text{D.63})$$

Die gleichen Talmi-Moshinsky-Transformationen gelten natürlich auch wieder für die Oszillatorfunktionen $(-i)^N (2\pi)^3 \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\rho) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^{\frac{1}{\beta}}(\vec{p}_\lambda) \right]_M^L$ im Impulsraum!

D.5 Oszillatorfunktionen mit definierter S_3 -Permutationssymmetrie

Für die Konstruktion der total antisymmetrischen Baryonbasis benötigen wir $O(3)$ -Oszillatorfunktionen mit definierter S_3 -Symmetrie. Dazu muß die Darstellung der Generatoren (12) und (123) auf den Oszillatorfunktionen bekannt sein. Wir haben die Relativkoordinaten $\vec{\rho}, \vec{\lambda}$ gerade

so gewählt, daß sie den gemischt symmetrischen irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe S_3 entsprechen:

$$(12) \begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\rho} \end{pmatrix}, \quad (123) \begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\rho} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.64})$$

In diesen Koordinaten ist die Darstellung (123) auf den Oszillatorfunktionen gerade durch die der Koordinatentransformation Satz 1 \rightarrow Satz 2 entsprechenden Talmi-Moshinsky-Transformation (D.62) auf dem durch N und L vorgegebenen invarianten Unterraum $\mathcal{U}(N, L)$ gegeben. Wie unmittelbar einsichtig, ist die Darstellung von (12) gegeben durch

$$(12) [\phi_{n_\rho l_\rho}^\beta(\vec{\rho}) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^\beta(\vec{\lambda})]_M^L = (-1)^{l_\rho} [\phi_{n_\rho l_\rho}^\beta(\vec{\rho}) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^\beta(\vec{\lambda})]_M^L. \quad (\text{D.65})$$

Die invarianten Darstellungsräume der Permutationoperatoren $\Pi \in S_3$ sind also die durch N und L vorgegebenen Unterräume $\mathcal{U}(N, L)$.

Wir wollen hier nicht im Detail auf die Konstruktion der Oszillatorzustände definierter Symmetrie auf diesen Unterräumen eingehen, sondern sie nur skizzieren und das Ergebnis angeben. Eine ausführliche Beschreibung ist in den Anhängen der Arbeit von W. Blask [21] bzw. originär in [31] gegeben:

- Man wählt die neuen Koordinaten

$$\vec{\eta}_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\lambda} - i \vec{\rho}), \quad \text{und} \quad \vec{\eta}_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\lambda} + i \vec{\rho}), \quad (\text{D.66})$$

in denen sich (12) als eine Vertauschung der Koordinaten und (123) als Multiplikation mit einem Phasenfaktor darstellt:

$$(12) \begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \vec{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \vec{\eta}_2 \end{pmatrix}, \quad (123) \begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \vec{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i \frac{2}{3}\pi} & 0 \\ 0 & e^{i \frac{2}{3}\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \vec{\eta}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.67})$$

Für Oszillatorfunktionen in diesen Koordinaten sind die Darstellungen von (12) und (123) sehr einfach:

$$(12) |n_{\eta_1} l_{\eta_1} n_{\eta_2} l_{\eta_2}; LM\rangle = (-1)^{l_{\eta_1} + l_{\eta_2} - L} |n_{\eta_2} l_{\eta_2} n_{\eta_1} l_{\eta_1}; LM\rangle \quad (\text{D.68})$$

$$(123) |n_{\eta_1} l_{\eta_1} n_{\eta_2} l_{\eta_2}; LM\rangle = e^{i \frac{4}{3}\pi g} |n_{\eta_1} l_{\eta_1} n_{\eta_2} l_{\eta_2}; LM\rangle \quad (\text{D.69})$$

mit $2g \equiv \nu \equiv 2n_{\eta_1} + l_{\eta_1} - (2n_{\eta_2} + l_{\eta_2})$.

- Durch Anwendung von Young-Projektoren, welche aus (12) und (123) zusammengesetzt sind, werden in diesen Koordinaten Oszillatorzustände mit definierter Permutationssymmetrie \mathcal{S} , $M_{\mathcal{S}}$, $M_{\mathcal{A}}$, \mathcal{A} konstruiert; anschließend transformiert man über eine Brody-Moshinsky-Transformation ($d = 1$) die Oszillatorzustände der Koordinaten $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$ in Oszillatorzustände der standardmäßigen Jacobi-Koordinaten $\vec{\rho}, \vec{\lambda}$.
- Die Oszillatorfunktionen mit definierter Symmetrie R_L des zu N, L gegebenen Unterraumes $\mathcal{U}(N, L)$ sind dann folgende Linearkombinationen der Oszillatorfunktionen (D.42):

$$\begin{aligned} & \langle \vec{\rho}, \vec{\lambda} | n_{\eta_1} l_{\eta_1} n_{\eta_2} l_{\eta_2}; LM \rangle_{R_L} \\ &= \sum_{n_\rho l_\rho n_\lambda l_\lambda} \left[\phi_{n_\rho l_\rho}^\beta(\vec{\rho}) \otimes \phi_{n_\lambda l_\lambda}^\beta(\vec{\lambda}) \right]_M^L A(\nu, R_L) (-1)^{n_\rho + l_\rho} i^{l_\rho} \left(1 + (\pm)_{R_L} (-1)^{l_\rho} \right) \\ & \quad \times \langle n_\rho l_\rho, n_\lambda l_\lambda; L | n_{\eta_1} l_{\eta_1}, n_{\eta_2} l_{\eta_2}; L \rangle_1 \end{aligned} \quad (\text{D.70})$$

$\nu = 2n_{\eta_1} + l_{\eta_1} - (2n_{\eta_2} + l_{\eta_2})$	R_L	$A(\nu, R_L)$
$\nu > 0$	$M_{\mathcal{S}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
	$M_{\mathcal{A}}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}(-1)^{\nu+1}$
$\nu = 0 \pmod{3}$ $(n_{\eta_1}, l_{\eta_1}) \neq (n_{\eta_2}, l_{\eta_2})$	\mathcal{S}	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
	\mathcal{A}	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\nu = 0 \pmod{3}$ $(n_{\eta_1}, l_{\eta_1}) = (n_{\eta_2}, l_{\eta_2})$	\mathcal{S}	$\frac{1}{2}$
	\mathcal{A}	$\frac{1}{2}$

Tabelle D.1: Die Koeffizienten $A(\nu, R_L)$ für verschiedene ν und Symmetrietypen R_L

mit den Brody-Moshinsky-Klammern $\langle n_{\rho}l_{\rho}, n_{\lambda}l_{\lambda}; L | n_{\eta_1}l_{\eta_1}, n_{\eta_2}l_{\eta_2}; L \rangle_1$. Hierbei ist $(\pm)_{R_L} = +1$ für $R_L = \mathcal{S}, M_{\mathcal{S}}$ und $(\pm)_{R_L} = -1$ für $R_L = \mathcal{A}, M_{\mathcal{A}}$. Die Koeffizienten $A(\nu, R_L)$ sind in Tabelle D.1 angegeben.

Auch hier gelten natürlich wieder die entsprechenden Gleichungen für die Impulsraum-Oszillatorfunktionen!

Anhang E

Drehimpulskopplungen und Wigner-Eckart-Theorem

E.1 Drehimpuls-Eigenzustände und Tensoroperatoren

Drehimpuls-Eigenzustände

Die Eigenzustände der Drehimpulsoperatoren \vec{J}^2 und J_3 erfüllen die Relationen

$$\vec{J}^2 |jm\rangle = j(j+1) |jm\rangle \quad (\text{E.1})$$

$$J_3 |jm\rangle = m |jm\rangle. \quad (\text{E.2})$$

Die Wirkung der Auf- bzw. Absteigeoperatoren $J_{\pm} = J_1 \pm i J_2$ ist gegeben durch

$$J_{\pm} |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |jm \pm 1\rangle. \quad (\text{E.3})$$

Sie sind normiert gemäß

$$\langle j'm' | jm \rangle = \delta_{j'j} \delta_{m'm}. \quad (\text{E.4})$$

Tensoroperatoren

Ein Tensoroperator der Stufe k mit $2k+1$ Komponenten $q = -k \dots k$ ist durch sein Verhalten unter Drehungen definiert:

$$\hat{R}(\omega) T_q^{[k]} \hat{R}(\omega)^{-1} = \sum_{q'} T_{q'}^{[k]} D_{q'q}^{(k)}(\omega). \quad (\text{E.5})$$

Hierbei ist $\hat{R}(\omega) = e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{J}}$ der Rotationsoperator und $\mathcal{D}_{q'q}^{(k)}(\omega) = \langle k, q' | \hat{R}(\omega) | k, q \rangle$ sind die sogenannten Wignerschen \mathcal{D} -Funktionen.

Die Komponenten eines Tensoroperators genügen den Vertauschungsrelationen

$$[J_3, T_q^{[k]}] = q T_q^{[k]} \quad (\text{E.6})$$

$$[J_{\pm}, T_q^{[k]}] = \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} T_{q \pm 1}^{[k]}. \quad (\text{E.7})$$

Ein Vektoroperator $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ entspricht einem Tensoroperator erster Stufe $T^{[1]}$, dessen sphärischen Tensorkomponenten $T_q^{[1]}$ folgendermaßen aus den kartesischen Komponenten T_i des Vektoroperators gebildet werden:

$$T_{\pm 1}^{[1]} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} T_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1 \pm i T_2) \quad (\text{E.8})$$

$$T_0^{[1]} = T_3. \quad (\text{E.9})$$

Ein Beispiel für einen Tensoroperator erster Stufe ($k = 1$):

Stellt man den Impulsvektor \vec{p} mit Hilfe von Kugelflächenfunktionen in Kugelkoordinaten p, θ, φ dar und berechnet nach (E.8) seine drei sphärischen Tensorkomponenten $p_{m=-1,0,1}^{[1]}$, so entsprechen diese im wesentlichen den drei Komponenten der Kugelflächenfunktion Y_1 :

$$p_m^{[1]} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} p Y_{1m}(\theta, \phi). \quad (\text{E.10})$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoroperatoren \vec{t}_1, \vec{t}_2 ist ein skalarer Operator und entspricht einem Tensoroperator nullter Stufe. Dieser kann als die Kopplung (siehe Abschnitt E.2) der \vec{t}_1 und \vec{t}_2 entsprechenden sphärischen Tensoroperatoren $t_1^{[1]}$ und $t_2^{[1]}$ dargestellt werden:

$$\left[t_1^{[1]} \otimes t_2^{[1]} \right]_0^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2. \quad (\text{E.11})$$

E.2 Drehimpulskopplungen

Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Seien $|j_1, m_1\rangle$ und $|j_2, m_2\rangle$ die Eigenzustände zu den Drehimpulsoperatoren \vec{j}_1 bzw. \vec{j}_2 . Durch Kopplung von $|j_1, m_1\rangle$ und $|j_2, m_2\rangle$ erhält man einen Eigenzustand $|J, M\rangle$ zu $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$:

$$|J, M\rangle \equiv [|j_1\rangle \otimes |j_2\rangle]_M^J = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | J M \rangle |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle. \quad (\text{E.12})$$

Analog gilt für Tensoroperatoren:

$$\left[T_1^{[k_1]} \otimes T_2^{[k_2]} \right]_q^{[k]} = \sum_{q_1, q_2} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle T_{1 q_1}^{[k_1]} \otimes T_{2 q_2}^{[k_2]}. \quad (\text{E.13})$$

Die Koeffizienten sind die sogenannten **Clebsch-Gordan-Koeffizienten**. Sie erfüllen die folgenden Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | J M \rangle \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (\text{E.14})$$

$$\sum_{J, M} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | J M \rangle \langle j_1 m_1', j_2 m_2' | J M \rangle = \delta_{m_1, m_1'} \delta_{m_2, m_2'}. \quad (\text{E.15})$$

Mit diesen folgen die zu (E.12) und (E.13) inversen Beziehungen

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = \sum_{J, M} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | J M \rangle [|j_1\rangle \otimes |j_2\rangle]_M^J \quad (\text{E.16})$$

$$T_{1 q_1}^{[k_1]} \otimes T_{2 q_2}^{[k_2]} = \sum_{k, q} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle \left[T_1^{[k_1]} \otimes T_2^{[k_2]} \right]_q^{[k]}. \quad (\text{E.17})$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind reell, die Phasenkonvention gemäß [30] lautet:

$$\langle j_1 j_1, j_2 m_2 | J J \rangle \geq 0 \quad \text{für} \quad j_1 \geq j_2.$$

Die Umkopplung zweier Drehimpulzustände liefert einen Phasenfaktor:

$$[|j\rangle_1 \times |j\rangle_2]_M^J = (-1)^{j_1+j_2-J} [|j\rangle_2 \times |j\rangle_1]_M^J. \quad (\text{E.18})$$

3j-Symbole

Statt des Clebsch-Gordan-Koeffizienten benutzt man häufig das sogenannte 3j-Symbol:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\hat{J}} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | J M \rangle \quad (\text{E.19})$$

mit $\hat{J} = \sqrt{2J+1}$.

Die 3j-Symbole $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ genügen den folgenden Symmetrierelationen:

- Sie sind nur dann von Null verschieden, wenn gilt
 $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ (Dreiecksungleichung)

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0.$$

- Die Permutation der Spalten liefert i.a. einen Phasenfaktor, und zwar gilt:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = C_\sigma \begin{pmatrix} j_{\sigma(1)} & j_{\sigma(2)} & j_{\sigma(3)} \\ m_{\sigma(1)} & m_{\sigma(2)} & m_{\sigma(3)} \end{pmatrix} \quad (\text{E.20})$$

mit $C_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \sigma \text{ gerade Permutation} \\ (-1)^{j_1+j_2+j_3} & \text{wenn } \sigma \text{ ungerade Permutation.} \end{cases}$

Die Multiplikation der unteren Spalte mit (-1) liefert ebenfalls einen Phasenfaktor:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \quad (\text{E.21})$$

- Sind alle m-Quantenzahlen gleich Null, so gilt

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{falls } j_1 + j_2 + j_3 \text{ ungerade.} \quad (\text{E.22})$$

In speziellen Fällen hat das 3j-Symbols eine besonders einfache Form, z.B:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & 0 \\ m_1 & -m_2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-m_1}}{\hat{j}} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2}. \quad (\text{E.23})$$

6j-Symbole

Die Umkopplung dreier Drehimpulse oder Tensoroperatoren führt auf die Definition der 6j-Symbole:

$$\left[\left[T_1^{[k_1]} \otimes T_2^{[k_2]} \right]^{[k_{12}]} \otimes T_3^{[k_3]} \right]_q^{[k_{123}]} = \sum_{k_{23}} (-1)^{k_1+k_2+k_3+k_{123}} \hat{k}_{12} \hat{k}_{23} \left\{ \begin{matrix} k_1 & k_2 & l_{12} \\ k_3 & k_{123} & k_{23} \end{matrix} \right\} \left[T_1^{[k_1]} \otimes \left[T_2^{[k_2]} \otimes T_3^{[k_3]} \right]^{[k_{23}]} \right]_q^{[k_{123}]} \quad (\text{E.24})$$

Die 6j-Symbole haben folgende Eigenschaften:

- Sie sind invariant bei Vertauschung zweier Spalten oder zweier übereinander stehender Paare.
- $\left\{ \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{smallmatrix} \right\}$ ist nur dann von Null verschieden, falls gilt:

$$\begin{aligned} |j_1 - j_2| &\leq j_3 \leq j_1 + j_2, \\ |j_1 - j_5| &\leq j_6 \leq j_1 + j_5, \\ |j_4 - j_2| &\leq j_6 \leq j_4 + j_2, \\ |j_4 - j_5| &\leq j_3 \leq j_4 + j_5. \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

- Ist ein Eintrag im 6j-Symbol gleich Null, dann hat es die einfache Form

$$\left\{ \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & j'_3 & j'_2 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_3}}{\hat{j}_2 \hat{j}_3} \delta_{j_2 j'_2} \delta_{j_3 j'_3}. \quad (\text{E.26})$$

9j-Symbole

Die Umkopplung von vier Drehimpulsen oder Tensoroperatoren definiert die 9j-Symbole:

$$\begin{aligned} \left[\left[T_1^{[k_1]} \otimes T_2^{[k_2]} \right]^{[12]} \otimes \left[T_3^{[k_3]} \otimes T_4^{[k_4]} \right]^{[34]} \right]^{[K]}_q &= \sum_{k_{13} k_{24}} \hat{k}_{12} \hat{k}_{34} \hat{k}_{13} \hat{k}_{24} \left\{ \begin{smallmatrix} k_1 & k_2 & k_{12} \\ k_3 & k_4 & k_{34} \\ k_{13} & k_{24} & K \end{smallmatrix} \right\} \\ &\quad \left[\left[T_1^{[k_1]} \otimes T_3^{[k_3]} \right]^{[13]} \otimes \left[T_2^{[k_2]} \otimes T_4^{[k_4]} \right]^{[24]} \right]^{[K]}_q \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

Die 9j-Symbole haben folgende Eigenschaften:

- Die Vertauschung zweier Spalten oder zweier Zeilen führt zu einem Phasenfaktor $(-1)^\Sigma$, wobei Σ die Summe über alle auftretenden Drehimpulse ist. Darüberhinaus ist es invariant unter Transponieren.
- Im Fall von Null-Einträgen vereinfacht sich das 9j-Symbol:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & 0 \end{smallmatrix} \right\} = \delta_{j_{12} j_{34}} \delta_{j_{13} j_{24}} \frac{(-1)^{j_2+j_{12}+j_3+j_{13}}}{j_{12} j_{13}} \left\{ \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_4 & j_3 & j_{13} \end{smallmatrix} \right\}, \quad (\text{E.28})$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} j_1 & j_1 & 0 \\ j_2 & j_2 & 0 \\ j & j & 0 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_1 & j_2 & j \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{\hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{j}}. \quad (\text{E.29})$$

E.3 Wigner-Eckart-Theorem und reduzierte Matrixelemente

Das **Wigner-Eckart-Theorem** definiert das sogenannte reduzierte Matrixelementes der Tensorkomponente $T_q^{[k]}$ eines sphärischen Tensoroperators:

$$\langle j_1, m_1 | T_q^{[k]} | j_2, m_2 \rangle = (-1)^{j_1-m_1} \left(\begin{smallmatrix} j_1 & k & j_2 \\ -m_1 & q & m_2 \end{smallmatrix} \right) \langle j_1 || T^{[k]} || j_2 \rangle. \quad (\text{E.30})$$

Die Abhängigkeit des gesamten Matrixelementes von den m-Quantenzahlen steckt in dem 3j-Symbol. Mit der Kenntnis des reduzierten Matrixelementes $\langle j_1 || T^{[k]} || j_2 \rangle$ lassen sich also sämtliche Matrixelemente zu beliebigen m_1, m_2 berechnen.

Im Fall eines skalaren Operators hat (E.30) die einfache Form:

$$\langle j, m | T_0^{[0]} | j', m' \rangle = \frac{1}{j} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \langle j || T^{[0]} || j \rangle. \quad (\text{E.31})$$

Für das reduzierte Matrixelement eines Tensorprodukts von Operatoren $T^{[k]}$ und $S^{[p]}$ gilt:

• Wenn beide Operatoren $T^{[k]}$ und $S^{[p]}$ auf verschiedenen Räumen wirken:

$$\langle j_1, j_2; J || [T^{[k]} \otimes S^{[p]}]^{[l]} || j'_1, j'_2, J' \rangle = \hat{J} \hat{l} \hat{J}' \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J \\ j'_1 & j'_2 & J' \\ k & p & l \end{matrix} \right\} \langle j_1 || T^{[k]} || j'_1 \rangle \langle j_2 || S^{[p]} || j'_2 \rangle \quad (\text{E.32})$$

• Wenn beide Operatoren $T^{[k]}$ und $S^{[p]}$ auf gleichen Räumen wirken:

$$\langle j || [T^{[k]} \otimes T^{[p]}]^{[l]} || j' \rangle = (-1)^{j+l+j'} \hat{l} \sum_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} j' & j & l \\ k & p & \alpha \end{matrix} \right\} \langle j || T^{[k]} || \alpha \rangle \langle \alpha || T^{[p]} || j' \rangle. \quad (\text{E.33})$$

Häufig vorkommende, einfache reduzierte Matrixelemente sind:

$$\langle j || \mathbf{1} || j' \rangle = \hat{j} \delta_{jj'} \quad (\text{E.34})$$

$$\langle j || \mathbf{J} || j' \rangle = \sqrt{j(j+1)(2j+1)} \delta_{jj'} \quad (\text{E.35})$$

$$\langle Y_l || Y_L || Y_{l'} \rangle = (-1)^l \frac{\hat{l} \hat{L} \hat{l'}}{\sqrt{4\pi}} \left(\begin{matrix} l & L & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right). \quad (\text{E.36})$$

Anhang F

Dirac-Spinstrukturen und ihre Darstellung auf dem Spinraum der $2 \times 2 \times 2$ -Amplituden

Die in dieser Arbeit verwendeten Wechselwirkungskerne sind im Impulsraum Faltungstypkerne, die i.a. aus Summanden der Form

$$V(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda, \vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) = V(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) = v(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3] \otimes V_{\mathcal{F}} \quad (\text{F.1})$$

zusammengesetzt sind.

Hierbei sei $v(.,.) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein reelles, skalares, d.h. rotationsinvariantes Potential, welches nur von den drehinvarianten Koordinaten $|\vec{p}_\rho|^2$, $|\vec{p}_\lambda|^2$ und $\vec{p}_\rho \cdot \vec{p}_\lambda$ abhängig ist, also $v(\vec{q}_\rho, \vec{q}_\lambda)^* = v(\vec{q}_\rho, \vec{q}_\lambda)$ und $v(\vec{q}_\rho, \vec{q}_\lambda) = v(|\vec{q}_\rho|^2, |\vec{q}_\lambda|^2, \vec{q}_\rho \cdot \vec{q}_\lambda)$.

$\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3 : \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$ stellt die Spinstruktur (Dirac-Struktur) der Wechselwirkung dar, und $V_{\mathcal{F}}$ beschreibt die Flavourabhängigkeit der Wechselwirkung.

In diesem Anhang wird beschrieben, wie durch die Einbettungsoperatoren die $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$ -Dirac-Spinstrukturen auf $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ -Spinoperatoren reduziert werden.

F.1 Mögliche Spinstrukturen

Bestimmte Symmetrieforderungen an den Salpeter-Hamiltonian schränken die möglichen Spinstrukturen $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3$ in dem Wechselwirkungskern (F.1) ein:

- Hermitizität von \mathcal{H} (vergl. Abschnitt 2.3):

$$\Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]^\dagger = \Gamma_1^\dagger \otimes \Gamma_2^\dagger \otimes \Gamma_3^\dagger = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3 \quad (\text{F.2})$$

- Symmetrie von \mathcal{H} unter Paritätstransformationen (vergl. Abschnitt 2.4.1)

$$\Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3, \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0]_- = 0 \quad (\text{F.3})$$

- Symmetrie von \mathcal{H} bzgl. positiver und negativer Eigenwerte (vergl. Abschnitt 2.4.3)

$$\Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3, \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5]_- = 0 \quad (\text{F.4})$$

Die Hermitizitätsbedingung (F.2) erfordert, daß entweder alle Γ_i hermitesch sind, oder daß nur ein Γ hermitesch ist und die anderen beiden antihermitesch sind. Um nun Spinstrukturen zu konstruieren, die mit $\gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0$ und $\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5$ kommutieren, betrachten wir nun folgende vier Klassen von Matrizen $\Gamma : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$:

- Typ 1: $[\Gamma, \gamma^0]_- = 0$ und $[\Gamma, \gamma^0 \gamma^5]_- = 0$

$$\Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{Beispiel: } A = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}, \text{ d.h. } \Gamma = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^4} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \quad (\text{F.5})$$

- Typ 2: $[\Gamma, \gamma^0]_- = 0$ und $[\Gamma, \gamma^0 \gamma^5]_+ = 0$

$$\Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Beispiel: } A = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}, \text{ d.h. } \Gamma = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.6})$$

- Typ 3: $[\Gamma, \gamma^0]_+ = 0$ und $[\Gamma, \gamma^0 \gamma^5]_- = 0$

$$\Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Beispiel: } A = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}, \text{ d.h. } \Gamma = \gamma^0 \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \\ -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.7})$$

- Typ 4: $[\Gamma, \gamma^0]_+ = 0$ und $[\Gamma, \gamma^0 \gamma^5]_+ = 0$

$$\Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \quad \text{Beispiel: } A = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}, \text{ d.h. } \Gamma = \gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \quad (\text{F.8})$$

In allen Fällen bezeichnet hier $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ eine (schief)hermitesche Matrix auf dem \mathbb{C}^2 .

Dann genügen folgende Kombinationen Γ_i der Typen 1 bis 4 den Kommutatorrelationen (F.3) und (F.4) (Die in diesem Modell explizit verwendeten Spinstrukturen geben wir jeweils als Beispiel an!):

- Typ I: Γ_1, Γ_2 und Γ_3 sind vom Typ 1

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{I}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad (\text{F.9})$$

Beispiel: $A_i = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{I}} = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^4} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^4} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^4}$

- Typ II: Zwei der Γ_i sind vom Typ 2 und eines vom Typ 1

a:

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IIa}} = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad (\text{F.10})$$

Beispiel: $A_i = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IIa}} = \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^4}$

b:

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IIb}} = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & A_3 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.11})$$

Beispiel: $A_i = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IIb}} = \gamma^0 \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^4} \otimes \gamma^0$

c:

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IIc}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & A_3 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.12})$$

Beispiel: $A_i = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IIc}} = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^4} \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0$

- Typ III: Zwei der Γ_i sind vom Typ 3 und eines vom Typ 1

a:

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IIIa}} = \begin{pmatrix} 0 & -A_1 \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -A_2 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad (\text{F.13})$$

Beispiel: $A_i = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2} \Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IIIa}} = \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \mathbb{1}_{C^4}$

b:

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IIIb}} = \begin{pmatrix} 0 & -A_1 \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -A_3 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.14})$$

Beispiel: $A_i = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2} \Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IIIb}} = \gamma^0 \gamma^5 \otimes \mathbb{1}_{C^4} \otimes \gamma^0 \gamma^5$

c:

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IIIc}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -A_2 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -A_3 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.15})$$

Beispiel: $A_i = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2} \Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IIIc}} = \mathbb{1}_{C^4} \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5$

- Typ IV: Zwei der Γ_i sind vom Typ 4 und eines vom Typ 1

a:

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IVa}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & -A_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad (\text{F.16})$$

Beispiel: $A_i = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2} \Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IVa}} = \gamma^5 \otimes \gamma^5 \otimes \mathbb{1}_{C^4}$

b:

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IVb}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & -A_3 \end{pmatrix} \quad (\text{F.17})$$

Beispiel: $A_i = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2} \Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IVb}} = \gamma^5 \otimes \mathbb{1}_{C^4} \otimes \gamma^5$

c:

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IVc}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & -A_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & -A_3 \end{pmatrix} \quad (\text{F.18})$$

Beispiel: $A_i = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2} \Rightarrow [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3]_{\text{IVc}} = \mathbb{1}_{C^4} \otimes \gamma^5 \otimes \gamma^5$

F.2 Reduktion der Spinstrukturen

Zur Berechnung der Wechselwirkungsmatrixelemente in Abschnitt 3.3.1 bzgl. $2 \times 2 \times 2$ -Baryonbasis-zustände wird mit Hilfe der Einbettungsoperatoren $T^\pm(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda)$ der auf den $4 \times 4 \times 4$ -Amplituden wirkende Wechselwirkungskern $\gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 V(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\rho', \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\lambda')$ zu Operatoren reduziert, welche auf $2 \times 2 \times 2$ -Amplituden wirken.

Mit der Identität (3.58)

$$\begin{aligned} T^+(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &= \sum_{i=0}^7 \mathcal{T}_i \mathcal{Q}_i(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \\ T^-(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) &= \sum_{i=0}^7 \epsilon_i \mathcal{T}_{7-i} \mathcal{Q}_i(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \quad \text{wobei } \epsilon_i \equiv \begin{cases} +1 & \text{für } i = 0, 1, 2, 3 \\ -1 & \text{für } i = 4, 5, 6, 7 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

führt dies zu der Zerlegung

$$\begin{aligned} & \left[T^{(\pm)_1}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \right]^\dagger \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 V(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) T^{(\pm)_2}(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) \\ &= \sum_{m=0}^7 \sum_{n=0}^7 \mathcal{Q}_m^\dagger(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) V_m^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \mathcal{Q}_n(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) . \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

Die Einbettungsmatrizen \mathcal{T}_i reduzieren hierbei die Spinstruktur im Kern $V(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda)$ zu Spinoperatoren $\mathcal{T}_m^\dagger [\gamma_0 \Gamma_1 \otimes \gamma_0 \Gamma_2 \otimes \gamma_0 \Gamma_3] \mathcal{T}_n$ auf dem $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned} V_m^{++}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) &\equiv \mathcal{T}_m^\dagger \left[\gamma_0 \otimes \gamma_0 \otimes \gamma_0 \quad V(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \right] \mathcal{T}_n \\ &= v(|\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho|, |\vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda|) \mathcal{T}_m^\dagger [\gamma_0 \Gamma_1 \otimes \gamma_0 \Gamma_2 \otimes \gamma_0 \Gamma_3] \mathcal{T}_n \otimes V_{\mathcal{F}} \\ V_m^{+-}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) &\equiv \mathcal{T}_m^\dagger \left[\gamma_0 \otimes \gamma_0 \otimes \gamma_0 \quad V(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \right] \epsilon_n \mathcal{T}_{7-n} \\ &= v(|\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho|, |\vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda|) \mathcal{T}_m^\dagger [\gamma_0 \Gamma_1 \otimes \gamma_0 \Gamma_2 \otimes \gamma_0 \Gamma_3] \epsilon_n \mathcal{T}_{7-n} \otimes V_{\mathcal{F}} \\ V_m^{-+}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) &\equiv \epsilon_m \mathcal{T}_{7-m}^\dagger \left[\gamma_0 \otimes \gamma_0 \otimes \gamma_0 \quad V(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \right] \mathcal{T}_n \\ &= v(|\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho|, |\vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda|) \epsilon_m \mathcal{T}_{7-m}^\dagger [\gamma_0 \Gamma_1 \otimes \gamma_0 \Gamma_2 \otimes \gamma_0 \Gamma_3] \mathcal{T}_n \otimes V_{\mathcal{F}} \\ V_m^{--}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) &\equiv \epsilon_m \mathcal{T}_{7-m}^\dagger \left[\gamma_0 \otimes \gamma_0 \otimes \gamma_0 \quad V(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \right] \epsilon_n \mathcal{T}_{7-n} \\ &= v(|\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho|, |\vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda|) \epsilon_m \mathcal{T}_{7-m}^\dagger [\gamma_0 \Gamma_1 \otimes \gamma_0 \Gamma_2 \otimes \gamma_0 \Gamma_3] \epsilon_n \mathcal{T}_{7-n} \otimes V_{\mathcal{F}} \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

Wegen der Bedingung (F.4)

$$\left[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3, \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \right]_- = 0 \quad (\text{F.22})$$

gilt für diese Komponenten:

$$V_m^{--}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) = -V_m^{++}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \quad (\text{F.23})$$

$$V_m^{+-}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) = V_m^{-+}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \quad (\text{F.24})$$

Dieses zeigt man sehr leicht mit den gültigen Beziehungen

$$\begin{aligned} \epsilon_i \mathcal{T}_{7-i} &= \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \mathcal{T}_i, \quad \left[\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5, \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 \right]_+ = 0 \\ \epsilon_i \mathcal{T}_{7-i}^\dagger &= -\mathcal{T}_i^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 . \end{aligned} \quad (\text{F.25})$$

Wir wollen die Darstellung der Dirac-Strukturen $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3$ vom Typ I, II, III und IV als Spinoperatoren $\mathcal{T}_m^\dagger [\gamma_0 \Gamma_1 \otimes \gamma_0 \Gamma_2 \otimes \gamma_0 \Gamma_3] \mathcal{T}_n$ auf dem $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ explizit angeben: Man findet allgemein für alle Typen:

$$\mathcal{T}_m^\dagger [\gamma_0 \Gamma_1 \otimes \gamma_0 \Gamma_2 \otimes \gamma_0 \Gamma_3] \mathcal{T}_n = \mathcal{D}_{mn}^{++}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \quad (\text{F.26})$$

$$\mathcal{T}_m^\dagger [\gamma_0 \Gamma_1 \otimes \gamma_0 \Gamma_2 \otimes \gamma_0 \Gamma_3] \epsilon_n \mathcal{T}_{7-n} = \mathcal{D}_{mn}^{+-}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \quad (\text{F.27})$$

$$\epsilon_m \mathcal{T}_{7-m}^\dagger [\gamma_0 \Gamma_1 \otimes \gamma_0 \Gamma_2 \otimes \gamma_0 \Gamma_3] \mathcal{T}_n = \mathcal{D}_{mn}^{-+}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \quad (\text{F.28})$$

$$\epsilon_m \mathcal{T}_{7-m}^\dagger [\gamma_0 \Gamma_1 \otimes \gamma_0 \Gamma_2 \otimes \gamma_0 \Gamma_3] \epsilon_n \mathcal{T}_{7-n} = \mathcal{D}_{mn}^{--}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \quad (\text{F.29})$$

Die $\mathcal{D}_{mn}^{(\pm)1(\pm)2}$ sind jeweils 64 reelle Koeffizienten mit $\mathcal{D}_{mn}^{(\pm)1(\pm)2}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) \in \{-1, 0, +1\}$. Die Forderungen (F.3) und (F.4) führen dazu, daß von diesen 64 Koeffizienten nur 8 Koeffizienten ungleich Null, also ± 1 sind. Wegen (F.23) und (F.24) gilt außerdem:

$$\mathcal{D}_{mn}^{--}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) = -\mathcal{D}_{mn}^{++}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) \quad (\text{F.30})$$

$$\mathcal{D}_{mn}^{-+}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) = \mathcal{D}_{mn}^{+-}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) \quad (\text{F.31})$$

Darüberhinaus läßt sich \mathcal{D}^{+-} aus \mathcal{D}^{++} berechnen, nach (F.26) und (F.27) gilt nämlich

$$\mathcal{D}_{mn}^{+-}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) = \epsilon_n \mathcal{D}_{m(\tau-n)}^{++}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) \quad (\text{F.32})$$

Es reicht also die Kenntnis von \mathcal{D}^{++} .

Explizit bekommen wir für die Spinstrukturen Typ I bis IV:

Typ I

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mn}^{++}((\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3)_{\text{Typ I}}) &= \\ \mathcal{D}_{mn}^{++}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^4} \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}^4} \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}^4}) &= \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.33})$$

Typ IIa

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mn}^{++}((\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3)_{\text{Typ IIa}}) &= \\ \mathcal{D}_{mn}^{++}(\gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}^4}) &= \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.34})$$

Typ IIb

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mn}^{++}((\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3)_{\text{Typ IIb}}) &= \\ \mathcal{D}_{mn}^{++}(\gamma^0 \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}^4} \otimes \gamma^0) &= \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.35})$$

Typ IIc

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{mn}^{++} \left((\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3)_{\text{Typ IIc}} \right) &= \\
\mathcal{D}_{mn}^{++} (\mathbb{1}_{\mathbb{Q}^4} \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0) &= \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.36})
\end{aligned}$$

Typ IIIa

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{mn}^{++} \left((\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3)_{\text{Typ IIIa}} \right) &= \\
\mathcal{D}_{mn}^{++} (\gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5 \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^4}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.37})
\end{aligned}$$

Typ IIIb

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{mn}^{++} \left((\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3)_{\text{Typ IIIb}} \right) &= \\
\mathcal{D}_{mn}^{++} (\gamma^0 \gamma^5 \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^4} \otimes \gamma^0 \gamma^5) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.38})
\end{aligned}$$

Typ IIIc

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{mn}^{++} \left((\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3)_{\text{Typ IIIc}} \right) &= \\
\mathcal{D}_{mn}^{++} (\mathbb{1}_{\mathbb{Q}^4} \gamma^0 \gamma^5 \otimes \gamma^0 \gamma^5) &= \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.39})
\end{aligned}$$

Typ IVa

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{mn}^{++} \left((\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3)_{\text{Typ IVa}} \right) &= \\
\mathcal{D}_{mn}^{++} (\gamma^5 \otimes \gamma^5 \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^4}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.40})
\end{aligned}$$

Typ IVb

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{mn}^{++} \left((\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3)_{\text{Typ IVb}} \right) &= \\
\mathcal{D}_{mn}^{++} (\gamma^5 \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^4} \otimes \gamma^5) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.41})
\end{aligned}$$

Typ IVc

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{mn}^{++} \left((\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3)_{\text{Typ IVc}} \right) &= \\
\mathcal{D}_{mn}^{++} (\mathbb{1}_{\mathbb{Q}^4} \otimes \gamma^5 \otimes \gamma^5) &= \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.42})
\end{aligned}$$

Für diese Typen von Spinstrukturen haben wir dann

$$V_m^{(\pm)_1(\pm)_2}(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) = v(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) \mathcal{D}_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes V_{\mathcal{F}}. \quad (\text{F.43})$$

Damit folgt für die Zerlegung (F.20):

$$\begin{aligned}
& \left[T^{(\pm)_1}(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \right]^\dagger \gamma^0 \otimes \gamma^0 \otimes \gamma^0 V(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) T^{(\pm)_2}(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) \\
&= \sum_{m=0}^7 \sum_{n=0}^7 \mathcal{D}_{mn}^{(\pm)_1(\pm)_2}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_3) \\
& \quad \mathcal{Q}_m^\dagger(\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda) \left[v(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes V_{\mathcal{F}} \right] \mathcal{Q}_n(\vec{p}'_\rho, \vec{p}'_\lambda) \quad (\text{F.44})
\end{aligned}$$

Da die $\mathcal{D}^{(\pm)_1(\pm)_2}$ nur acht Einträge ungleich Null besitzen, besteht diese Zerlegung aus insgesamt acht Summanden. Die verschiedenen Typen von Dirac-Spinstrukturen unterscheiden sich also auf der Ebene der dreifach tensorierten Pauli-Spinoren durch die verschiedenen Kombinationen der acht Operatoren \mathcal{Q}_n links und rechts des Potentials $v(\vec{p}_\rho - \vec{p}'_\rho, \vec{p}_\lambda - \vec{p}'_\lambda) A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes V_{\mathcal{F}}$.

Literaturverzeichnis

- [1] E.E. Salpeter, H.A. Bethe, *Phys. Rev.* **84** (1951) 1232
- [2] E. E. Salpeter *Phys. Rev.* **87** (1952) 328
- [3] D. Lurie, '*Particles and Fields*', Interscience Publishers, New York (1968)
- [4] M. Gell-Mann, F.E. Low, *Phys. Rev.* **84** (1951) 350
- [5] N Isgur, G. Karl, *Phys. Rev.* **D18** (1978) 4187,
Phys. Rev. **D19** (1979) 2653
- [6] S.J. Wallace, V.B. Mandelzweig, *Nucl. Phys.* **A503** (1989) 673
- [7] G.C. Wick, *Phys. Rev.* **96** (1954) 1124
- [8] R.E. Cutkosky, *Phys. Rev.* **96** (1954) 1135
- [9] S.N. Biswas, S.R. Choudhury, K. Datta, A. Goyal, *Phys.Rev* **D26** (1982) 1983
- [10] C.R. Münz, '*Meson Decays and Form Factors in a Relativistic Quark Model*', Dissertation, Universität Bonn TK-94-16 (1994)
- [11] J. Resag, '*Analysis of the instantaneous Bethe-Salpeter equation and its application to $q\bar{q}$ bound states*', Dissertation, Universität Bonn TK-94-07 (1994)
- [12] J. Resag, C.R. Münz, B.C. Metsch, H.R. Petry, *Nucl. Phys.* **A578** (1994) 397
- [13] J. Resag, C.R. Münz, B.C. Metsch, H.R. Petry, *Nucl. Phys.* **A578** (1994) 418
- [14] Y. Tomozawa, *J. Math. Phys.* **24** (1983) 369
- [15] R.F. Meyer, *Nucl. Phys.* **B71** (1974) 226
- [16] R.F. Meyer, '*Spin structure of relativistic three-particle systems and the quarkmodel*', Mitteilung, Universität Bonn HE-75-14 (1975)
- [17] M. Böhm, R.F. Meyer, *Ann. Phys.* **120** (1979) 360
- [18] S. Weinberg '*The Quantum Theory of Fields*', Vol. I, Cambridge University Press, New York (1995)
- [19] C. Itzykson, J.-B. Zuber, '*Quantum Field Theory*', McGraw-Hill Book Company, New York (1980)
- [20] C. Carimalo, *J. Math. Phys.* **34** (1993) 4930

- [21] W.H. Blask, '*Baryon Spectroscopy and Scattering Observables in the Constituent Quark Model*', Dissertation, Universität Bonn TK-90-07 (1990)
- [22] B.C. Metsch, '*Instantoninduzierte Quarkkräfte und Hadronspektroskopie*', Habilitation, Universität Bonn (1993)
- [23] W.H. Blask, U. Bohn, M. G. Huber, B. C. Metsch, H. R. Petry, *Z. Phys.* **A337** (1990) 327
- [24] V. Keiner, '*Baryonen im nichtrelativistischen Konstituenten-Quarkmodell mit Ankopplung an mesonische Zerfallskanäle*', Diplomarbeit, Universität Bonn TK-93-16 (1993)
- [25] D. Flamm, F. Schöberl, '*Introduction to the Quark Model of Elementary Particles*', Vol. I, Gordon and Breach Science Publishers, London (1982)
- [26] F.E. Close, '*An Introduction to Quarks and Partons*', Academic Press, London (1979)
- [27] J.F. Lagaë, *Phys. Rev.* **D45** (1992) 305, 317
- [28] W. Lucha, F. F. Schöberl, D. Gromes, *Phys. Rep.* **200**, No.4 (1991) 127
- [29] A. Gara, B. Durand, L. Durand, L. J. Nickisch, *Phys. Rev.* **D40** (1989) 843,
A. Gara, B. Durand, L. Durand, L. J. Nickisch, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 1651
- [30] E.U. Condon, G.H. Shortly, '*The Theory of Atomic Spectra*', Cambridge University Press, London (1935)
- [31] M. Moshinsky, '*The Harmonic Oscillator in Modern Physics: From Atoms to Quarks*', Gordon and Breach, New York, London, Paris (1969)
- [32] G. 't Hooft, *Phys. Rev.* **D14** (1967) 3432
- [33] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B163** (1980) 46
- [34] H. R. Petry, *Phys. Lett.* **159B** (1985) 363
- [35] K. Kretzschmar, '*Das Confinementpotential in einem kovarianten Quarkmodell der Baryonen*', Diplomarbeit, Universität Bonn TK-97-04 (1997)
- [36] R. Ricken, '*Das Spektrum der seltsamen Baryonen in einem kovarianten Quarkmodell*', Diplomarbeit, Universität Bonn TK-97-05 (1997)
- [37] Particle Data Group (Baryon Particle Listings) *Phys. Rev.* **D54** (1996) 561

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Herbert R. Petry für die Überlassung dieses sehr interessanten und neuen Themas, sowie für die kontinuierliche und intensive Betreuung danken. Gleichmaßen danke ich Herrn Priv.-Doz. Dr. Bernard C. Metsch. Viele Diskussionen, sowie sein hilfreicher Rat haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Herrn Prof. Dr. Werner Sandhas danke ich für die Übernahme des Koreferats. Besonderen Dank für die erfolgreiche Zusammenarbeit, nicht nur bei der Erstellung dieser Arbeit, sondern während der gesamten Studienzeit, gilt meinen Freunden Klaus Kretzschmar und Ralf Ricken. Mit ihnen und meinem Freund Jürgen Schmoll habe ich eine schöne Zeit des Physikstudiums verbracht. Andrea von Weyhrother danke ich für das Korrekturlesen dieser Arbeit. Besonders bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Dipl. Phys. Christian Weichmann für seine enorme Hilfsbereitschaft in allen Dingen und insbesondere für seinen kompetenten Rat bei Problemen mit \LaTeX und C++. Schließlich bedanke ich mich bei allen Mitarbeitern unseres Instituts für das tolle Arbeitsklima und die gute Zusammenarbeit.

Last, but not least danke ich ganz besonders meinen Eltern und meinen Brüdern. Ohne ihre Unterstützung wäre mein Studium sicherlich nicht möglich gewesen.